Содержание

Вопросы, предложения и замечания можно направлять по e-mail himer2001@mail.ru или бросать в ICQ 257457884

Определение: *обыкновенным дифференциальным уравнением* называют соотношение вида $\Phi(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots y, x) = 0$, где y — функция переменной x. *Порядком дифференциального уравнения* называют максимальный порядок входящих в уравнение производных, *степенью дифференциального уравнения* — максимальную степень производной высшего порядка.

Определение: *решением дифференциального уравнения* называют всякую функцию (имеющую производные соответствующих порядков), при подстановке которой уравнение обращается в тождество (то есть выполняется при всех x, на которых задано решение).

Определение: *общим решением дифференциального уравнения* n-го порядка называют функцию $(n+1)$ переменной $f(x, C_1, \ldots C_n)$, а *частным решением* — всякое решение $f(x, C_1^0, \ldots C_n^0)$, где $C_1^0, \ldots C_n^0$ — произвольный набор констант. График частного решения называют *интегральной кривой дифференциального уравнения*, а процесс нахождения общего решения — *интегрированием дифференциального уравнения*.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1. Уравнения, разрешённые относительно производной

Начнём рассмотрение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с уравнений, разрешённых относительно производной, то есть таких уравнений, которые в явном виде задают y' как функцию x и y.

Определение 1.1: *задачей Коши* для уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной, называют систему двух соотношений

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

— самого уравнения и начального условия.

Теорема 1.1 (существования и единственности решения задачи Коши, без доказательства): *$D \subseteq \mathbb{R}^2$ — область; $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(D)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(D)$, $(x_0, y_0) \in D$; тогда $\exists\, \delta > 0:$ на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ задача Коши* (1.1.1) *имеет единственное решение* (*то есть через точку (x_0, y_0) проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения $y' = f(x, y)$*).

Теорема 1.2 (существования и единственности решения задачи Коши, без доказательства): *$D \subseteq \mathbb{R}^2$ — область; $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(D)$, тогда задача Коши* (1.1.1) *имеет в D по крайней мере одно решение. Если, кроме этого, выполняется условие Липшица*

$$\forall\, x, y_1, y_2 : (x, y_1), (x, y_2) \in D \;\exists\, L > 0 : |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|, \tag{1.1.2}$$

то $\exists\, \delta > 0:$ на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ задача Коши имеет единственное решение.

Теорема 1.3 (о непрерывной зависимости решения от параметра, без доказательства): *$D \subseteq \mathbb{R}^3$ — область; $f(x, y, \mu): D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(D)$ (μ — параметр). Для f на D выполняется условие Липшица* (1.1.2)*; тогда $\exists\, y(x, \mu)$ — решение задачи Коши, аналогичной* (1.1.1)*, причём $y \in C(D_1)$, где $D_1 = \{(x, \mu) | \;\exists\, y : (x, y, \mu) \in D\}$. Это, в частности, означает, что реализуется непрерывная зависимость решения уравнения от начальных условий.*

Определение 1.2: E — область; функция $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ *аналитична* в E, если $\forall\, x \in E$ $f \in D(x)$. $x_0 \in E$; f *аналитична в точке* x_0, если она аналитична в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 1.4 (об аналитичности решения, без доказательства): *$D \subseteq \mathbb{R}^3$ — область; $f(x,y,\mu): D \longrightarrow \mathbb{R}$; $(x_0,y_0,\mu_0) \in D$; f непрерывна по x и аналитически зависит от y,μ в точке (x_0,y_0,μ_0); тогда $y(x,\mu)$ аналитична в точке (x_0,μ_0).*

Теорема 1.5: *$D \subseteq \mathbb{R}^2$ — область; $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^k(D)$; тогда $y \in C^{k+1}(D_1)$, где $D_1 = \{x | \exists\, y: (x,y) \in D\}$.*

$\triangle$ $y'(x) = f(x, y(x))$, поэтому

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

и так далее (для производных более высоких порядков). Таким образом, существование (непрерывность) производных k-го порядка функции f обеспечивает существование (непрерывность) производной $(k+1)$-го порядка функции y, а потому $y \in C^{k+1}(D_1)$. ■

Приближённые методы решения:

1. *Метод изоклин* (*изоклины* — линии, на которых $f(x,y) = \mathrm{const}$): $y'(x_0) = f(x_0,y_0)$, то есть функция f позволяет определить значения производной во всех точках плоскости. Таким образом, можно задать на плоскости поле направлений касательных и решать задачу Коши графически.

2. *Метод ломаных Эйлера*: пусть $y(x_0) = y_0$ — начальное условие, и необходимо определить значение y в точке x. Разобъём отрезок $[x_0, x]$ на n равных частей; $h = \frac{|x-x_0|}{n}$, $x_k = x_0 + kh$. Построим касательную $l_0(x)$ к графику $y(x)$ в точке x_0 и будем считать, что

$$y(x_1) = l_0(x_1) = y_0 + y'(x_0) \cdot h = y_1.$$

Затем проведём аналогичную операцию в точке (x_1, y_1), и так далее вплоть до искомой точки x. Очевидно, что точность решения будем тем выше, чем больше n.

Теперь рассмотрим основные типы уравнений, разрешённых относительно производной, и способы их решения:

Уравнения с разделяющимися переменными: это уравнения вида

$$y' = f(x) \cdot g(y). \tag{1.1.3}$$

В случае $g(y) \neq 0$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \Rightarrow \Phi(x,y,C) = 0$$

— в неявном виде задаёт решение. Если $\exists\, y_1:\ g(y_1) = 0$, то $y = y_1 = \mathrm{const}$ также является решением уравнения (1.1.3) и должна быть добавлено к решениям, заданным как $\Phi(x,y,C) = 0$.

Однородные уравнения: в таких уравнениях $f(x,y)$ является однородной функцией нулевого порядка (то есть $\forall\, k \neq 0$ $f(kx,ky) = f(x,y)$). Для решения уравнения заметим, что

$$f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \ \left(k = \frac{1}{x}\right),$$

и сделаем замену $y = zx$. Тогда $y' = z + xz'$, $f(1,z) = \varphi(z)$, а уравнение преобразуется к

$$xz' + z = \varphi(z) \Rightarrow \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

— уравнению с разделяющимися переменными. Дополнительное решение $y = z_1 x + C$ возникает в том случае, когда $\exists\, z_1:\ \varphi(z_1) - z_1 = 0$.

Линейные уравнения: $y' + p(x)y = q(x)$. Для решения сделаем замену $y = z(x) \cdot u_0(x)$, тогда $z'u_0 + zu_0' + pzu_0 = q$. Подберём $u_0:\ u_0' + pu_0 = 0$ (то есть подставим в качестве u_0 любое частное решение этого уравнения с разделяющимися переменными), при этом станет равным нулю множитель перед z, а само уравнение преобразуется к $z'u_0 = q$ — уравнению с разделяющимися переменными.

Уравнение Бернулли:

$$y' + p(x)y = y^\alpha q(x). \tag{1.1.4}$$

Домножим обе части уравнения на $y^{-\alpha}$

$$y'y^{-\alpha} + py^{1-\alpha} = q$$

и сделаем замену $z = y^{1-\alpha}$, тогда $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Подставляя в (1.1.4), получим

$$z' + (1-\alpha)pz = (1-\alpha)q$$

— линейное уравнение.

Уравнение Риккати:

$$y' + p(x)y + r(x)y^2 = q(x) \tag{1.1.5}$$

не может быть решено в общем виде. Если известно y_1 — частное решение, то общее решение следует искать как $y = y_1 + z$. Подставляя в (1.1.5), получим

$$y_1' + z' + py_1 + pz + ry_1^2 + 2ry_1z + rz^2 = q \Rightarrow z' + pz + 2ry_1z + rz^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z' + z(p + 2ry_1) = -rz^2$$

— уравнение Бернулли.

Уравнение в полных дифференциалах: уравнения вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.1.6}$$

могут быть решены путём приведения к полному дифференциалу. Как известно из математического анализа, если $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} \in C(D)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$ — односвязная область), то $\exists\ u:\ du = Pdx + Qdy$, а решением уравнения (1.1.6) является $u(x,y) = C$, в неявном виде задающее $y = y(x)$.

Если же левая часть уравнения не является полным дифференциалом, необходимо подобрать *интегрирующий множитель* $\mu(x,y)$, удовлетворяющий условию

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Leftrightarrow P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1.1.7}$$

Это — уравнение в частных производных, которое становится обыкновенным дифференциальным уравнением (линейным, первого порядка) в том случае, когда μ является функцией только одной переменной.

Примеры:

1. *Радиоактивный распад*: пусть $N(t)$ — число нераспавшихся частиц. В соответствии с законом радиоактивного распада скорость распада пропорциональна числу нераспавшихся частиц, поэтому

$$\frac{dN}{dt} = -\beta N\ (\beta > 0) \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\beta dt \Rightarrow \ln N = -\beta t + C_1 \Rightarrow N = Ce^{-\beta t};$$
$$N(0) = C = N_0 \Rightarrow N = N_0e^{-\beta t}.$$

Несложно определить период полураспада ($\tau_{1/2}$) — время, за которое распадается половина вещества,

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\beta\tau_{1/2}} \Rightarrow \tau_{1/2} = \frac{1}{\beta}\ln 2.$$

2. *Тримолекулярная реакция* (например, $2NO + O_2 = 2NO_2$): пусть $y_1(t) = [NO]$, $y_2(t) = [O_2]$, тогда по закону действующих масс

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dt} = -2ky_1^2y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -ky_1^2y_2 \end{array}\right. \Rightarrow dy_1 = 2dy_2 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{2}(y_1 - C),$$

где k — константа скорости. Таким образом,

$$y_1' = -ky_1^2(y_1 - C) \Rightarrow \frac{1}{y_1^2}\cdot\frac{dy_1}{dt} = -k(y_1 - C) \Rightarrow \frac{d\left(\frac{1}{y_1}\right)}{dt} = k\left(\frac{1}{\frac{1}{y_1}} - C\right).$$

Обозначим $z = \dfrac{1}{y_1}$, тогда $\dfrac{zdz}{1 - zC} = kdt \Rightarrow$

$$kt = \int\frac{zdz}{1 - zC} = -\frac{1}{C}\cdot\int\left(1 + \frac{1}{zC - 1}\right)dz = -\frac{1}{C}\left(z + \frac{1}{C}\ln|zC - 1| + C_1\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = B - \frac{z}{Ck} - \frac{1}{C^2k}\ln|zC - 1|.$$

1.2. Уравнения первого порядка, неразрешённые относительно производной

Определение 1.3: *задачей Коши* для уравнения первого порядка, неразрешённого относительно производной, называют систему трёх соотношений

$$\left\{\begin{array}{l} F(x, y, y') = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1. \end{array}\right. \tag{1.2.1}$$

Теорема 1.6 (существования и единственности решения задачи Коши, без доказательства): *$D \subseteq \mathbb{R}^3$ — область; $F(x, y, y') : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $F \in C(D)$, $\exists\, F_y', F_{y'}' \in C(D)$; $(x_0, y_0, y_1) \in D$, $F_{y'}'(x_0, y_0, y_1) \neq 0$, а F_y' ограничена в окрестности точки (x_0, y_0, y_1); тогда $\exists\, \delta > 0$: на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ задача Коши (1.2.1) имеет единственное решение.*

Для решения задачи Коши (1.2.1) необходимо разрешить уравнение $F(x, y, y') = 0$ относительно одной из переменных. Далее возможны три случая:

1) *Уравнение разрешимо относительно y'* — в этом случае получим совокупность уравнений, разрешённых относительно производной. Способы решения таких уравнений рассмотрены в 1.1.

2) *Уравнение разрешимо относительно y*: $y = f(x, y')$. Обозначим $y' = p(x)$, тогда

$$\Rightarrow y = f(x, p(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx} \Rightarrow p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\cdot p' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p' = \varphi(x, p), \\ y = f(x, p), \end{array}\right.$$

то есть получено уравнение, разрешённое относительно p'.

3) *Уравнение разрешимо относительно* x: $x = f(y, y')$. Пусть $y' = p(y)$, тогда

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + p' \cdot \frac{\partial f}{\partial p} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p' = \varphi(y, p), \\ x = f(y, p), \end{array} \right.$$

то есть вновь получено уравнение, разрешённое относительно p'.

Уравнение Лагранжа:

$$y = x\,\varphi(y') + \psi(y'). \tag{1.2.2}$$

Обозначим $y' = p$ и продифференцируем (1.2.2)

$$y = x\,\varphi(p) + \psi(p) \Rightarrow p = \varphi(p) + x\,\varphi'(p) \cdot p' + \psi(p') \cdot p' \Leftrightarrow p - \varphi(p) = p'(x\,\varphi'(p) + \psi'(p)).$$

Таким образом, при $p' \neq 0$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x\,\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

– линейное уравнение на $x(p)$ (при $p' \neq 0$ $p \neq \text{const}$, то есть $\varphi(p) - p \neq 0$). При $p' = 0$ получаем алгебраическое уравнение на p $\varphi(p) - p = 0$, корни которого p_i позволяют определить дополнительные, линейные решения (1.2.2) $y = p_i x + C$.

Уравнение Клеро: это частный случай уравнения Лагранжа при $\varphi(y') = y'$,

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{1.2.3}$$

Вновь обозначим $y' = p$ и продифференцируем (1.2.3)

$$y = xp + \psi(p) \Rightarrow p = p + xp' + \psi'(p) \cdot p' \Leftrightarrow p'(x + \psi'(p)) = 0,$$

то есть в случае $p' \neq 0$ решение задано в параметрической форме

$$x = -\psi'(p),\ y = xp + \psi(p),$$

а случай $p' = 0$ даёт дополнительное решение $y = Cx + \psi(C)$.

1.3. Особые точки и особые решения

Определение 1.4: *особой точкой* обыкновенного дифференциального уравнения называют точку, в окрестности которой решение уравнения не существует (особая точка *первого типа*) или не единственно (особая точка *второго типа*).

Определение 1.5: *особым решением* дифференциального уравнения называют кривую, состоящую из особых точек второго типа. Более подробная классификация особых точек дана в 3.2.

Определение 1.6: *огибающей семейства кривых* называют кривую, которая в каждой своей точке касается одной из кривых семейства.

Теорема 1.7: *огибающая семейства кривых* $\Phi(x, y, a) = 0$ *может быть задана уравнением* $\Phi'_a = 0$.

△ Пусть огибающая задана в параметрическом виде

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(a) \\ y = \psi(a) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}.$$

С другой стороны, $\Phi(x, y, a) = 0$, поэтому

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0 = \Phi'_x + \Phi'_y \cdot y' \Rightarrow y' = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y} = \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)} \Leftrightarrow \Phi'_y \cdot \psi'(a) + \Phi'_x \cdot \varphi'(a) = 0$$

– это условие касания огибающей и одной из кривых семейства. Но в каждой точке огибающей $\Phi(\varphi(a), \psi(a), a) = 0$, то есть

$$\frac{d\Phi}{da} = \Phi'_x \cdot \varphi'(a) + \Phi'_y \cdot \psi'(a) + \Phi'_a = 0 \Rightarrow \Phi'_a = 0. \blacksquare$$

Поиск особых решений: общее решение уравнения первого порядка представляет собой семейство кривых, заданных в параметрическом виде уравнениями $F(x, y, p) = 0$ $(p = y')$ или $\Phi(x, y, C) = 0$. Интегральная кривая, отвечающая особому решению, состоит из отдельных точек каждого частного решения и в каждой такой точке имеет тот же наклон (ту же производную), что и частное решение. Значит, кривая особого решения в каждой своей точке касается одной из кривых семейства общего решения, то есть является огибающей этого семейства. Таким образом, особое решение уравнения первого порядка может быть найдено без полного интегрирования, поскольку по теореме 1.7 огибающая задана одним из уравнений

$$F'_p(x, y, p) = 0, \ \Phi'_C(x, y, C) = 0. \tag{1.3.1}$$

Соответствующие интегральные кривые называют *p-дискриминантными* или *C-дискриминантными* соответственно.

Полезная литература:

1. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит (2005). Главы 1, 2.

2. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука (1969). Глава 1.

2. Дифференциальные уравнения высших порядков

2.1. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского

Определение: *линейным дифференциальным уравнением* n-го порядка называется уравнение вида $a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) \cdot y = f(x)$; в случае $f \equiv 0$ уравнение называется *однородным* (иначе — неоднородным). Однородное уравнение может быть записано в виде $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$; тогда *задача Коши* формулируется как

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{01} \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1} \end{cases}$$

Теорема 1 (без доказательства): $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ — область; $f : G \to \mathbb{R}$, $f \in C(G)$; $M = (x_0, y_0, y_{01}, \ldots y_{0n-1}) \in G$. Тогда через точку M проходит хотя бы одна интегральная кривая — решение задачи Коши для линейного однородного диф. уравнения. Если, кроме этого, $\forall\, (x, y_{10}, y_{11}, \ldots y_{1n-1}),\ (x, y_{20}, y_{21}, \ldots y_{2n-1}) \in G \; \exists\, k > 0 :$

$$|f(x, y_{10}, \ldots y_{1\,n-1}) - f(x, y_{20}, \ldots y_{2n-1})| \leq k \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |y_{1i} - y_{2i}|,$$

то такое решение единственно.

Определение: $[a, b] \subset \mathbb{R}$; $y_1, \ldots y_n : [a, b] \to \mathbb{R}$; система функций $\{y_1, \ldots y_n\}$ *линейно независима* на отрезке $[a, b]$, если из того, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \equiv 0$ следует, что $\alpha_i = 0 \;\forall\, i = \overline{1, n}$.

Примеры линейно независимых систем функций:

1. $1, x, \ldots x^n$: существование $\alpha_i \neq 0 : \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots \alpha_n x^n \equiv 0$, означает, что многочлен степени n с хотя бы одним ненулевым коэффициентом имеет бесконечно много корней, что невозможно.

2. $e^{k_1 x}, \ldots e^{k_n x}$ $(k_i \neq k_j \;\forall\, i, j = \overline{1, n} : i \neq j)$. $\alpha_1 e^{k_1 x} + \ldots + \alpha_n e^{k_n x} \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 e^{(k_2 - k_1)x} + \ldots + \alpha_n e^{(k_n - k_1)x} \equiv 0 \Rightarrow$ (продифференцируем) $\alpha_2 (k_2 - k_1) e^{(k_2 - k_1)x} + \ldots + \alpha_n (k_n - k_1) e^{(k_n - k_1)x} \equiv 0$;проводя аналогичные операции, получим $C \cdot e^{(k_n - k_{n-1} - \ldots - k_1)x} \equiv 0$, что невозможно.

Замечание: если функции $y_1, \ldots y_n$ являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения, то и любая линейная комбинация этих функций является решением этого уравнения.

Определение: *определителем Вронского* системы функций $y_1, \ldots y_n$ называется

$$W(y_1(x), \ldots y_n(x)) \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема 2: если система функций $\{y_1, \ldots y_n\}$ линейно зависима на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, то $W(y_1, \ldots y_n) \equiv 0$.

$\triangle$ Система функций $\{y_1, \ldots y_n\}$ линейно зависима, поэтому $\exists\, \{\alpha_i\}_{i=1}^{n} : \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0,\ \alpha_1 y_1 +$

$\ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \Rightarrow \forall\, k = \overline{1, n-1}\ \alpha_1 y_1^{(k)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(k)} \equiv 0$. Таким образом, получим

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \\ \alpha_1 y_1' + \ldots + \alpha_n y_n' \equiv 0 \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases} \quad \text{— систему однородных линейных уравнений.}$$

Эта система имеет нетривиальное решение только в том случае, когда её определитель равен нулю (то есть $W(y_1, \ldots y_n) \equiv 0$). ■

Теорема 3: система функций $\{y_1, \ldots y_n\}$ линейно независима на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$; $y_i(x)$ — решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами. Тогда $W(y_1, \ldots y_n) \not\equiv 0$.

△ Пусть начальные условия заданы в точке x_0, а $W \equiv 0$. Тогда $W(y_1(x_0) \ldots y_n(x_0)) = 0$, а система линейных однородных уравнений $\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$ имеет нетривиальное решение $(\alpha_1^0, \ldots \alpha_n^0)$.

Рассмотрим функцию $y(x) = \alpha_1^0 y_1(x) + \ldots \alpha_n^0 y_n(x) \not\equiv 0$, которая, согласно замечанию, также является решением дифференциального уравнения. Выберем нулевые начальные условия $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$, им удовлетворяют два решения — $y(x)$ и $y \equiv 0$, что противоречит теореме 1. Таким образом, исходное предположение неверно и $W(y_1, \ldots y_n) \not\equiv 0$. ■

Теорема 4: $\{y_1, \ldots y_n\}$ — линейно независимая на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ система решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами. Тогда любое решение этого уравнения представимо в виде $y = \sum\limits_{i=1}^{n} C_k y_k$.

△ Согласно замечанию, $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_k y_k$ — решение диф. уравнения; пусть оно удовлетворяет начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_{01}, \ldots y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}$; тогда $\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0 \\ \vdots \\ C_1 y^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y \end{cases}$ $W(y_1(x_0), \ldots y_n(x_0) \neq 0$, поэтому $\exists\ (C_1^0, \ldots C_n^0) \neq 0$ — решение системы. Но $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i^0 y_i(x)$ — решение диф. уравнения с теми же начальными условиями, то есть, по теореме 1, $y \equiv \varphi$. ■

Следствие: линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с непрерывными коэффициентами имеет ровно n линейно независимых решений.

△ Непосредственно из теоремы следует, что уравнение не может иметь более n линейно независимых решений; между тем, изменением начальных условий всегда можно подобрать набор n линейно независимых решений, из которых можно составить невырожденную матрицу. Пусть заданы условия

$$\begin{matrix} y_1(x_0) = a_{11} & & y_n(x_0) = a_{1n} \\ & \ldots & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = a_{n1} & & y_n^{(n-1)}(x_0) = a_{nn} \end{matrix} \Rightarrow W(y_1(x_0), \ldots y_n(x_0)) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow W \not\equiv 0$, поэтому, из теоремы 3, $\{y_1, \ldots y_n\}$ — линейно независимая система решений. ■

Определение: система любых n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется фундаментальной системой решений.

Замечание: если уравнения $\begin{array}{l} y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=0 \\ y^{(n)}+b_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+b_n(x)y=0 \end{array}$ имеют одинаковую фундаментальную систему решений, то $a_k\equiv b_k\;\forall\, k=\overline{1,n}$.

$\triangle$ Рассмотрим разность двух уравнений $(b_1(x)-a_1(x))y^{(n-1)}+\ldots+(b_n(x)-a_n(x))y=0$ — это уравнение $(n-1)$-го порядка, которое, согласно следствию из теоремы 4, имеет $n-1$ линейно независимых решений; между тем, фундаментальная система решений исходных уравнений остаётся фундаментальной системой решений для полученного уравнения. Это означает, что полученное уравнение тривиально, то есть $b_k\equiv a_k$. $\blacksquare$

$\{y_1,\ldots y_n\}$ — фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения; y — линейная комбинация $y_1,\ldots y_n$. Тогда, по теореме 2,

$$W(y_1,\ldots y_n,y)=0=\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & \ldots & y_n' & y' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}=y^{(n)}\cdot W(y_1,\ldots y_n)+y^{(n-1)}\cdot\frac{dW(y_1,\ldots y_n)}{dx}+\ldots$$

(разложение по столбцу), где

$$\frac{dW(y_1,\ldots y_n)}{dx}=\begin{vmatrix} y_1' & \ldots & y_n' \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1'' & \ldots & y_n'' \\ y_1'' & \ldots & y_n'' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+\ldots+$$

$$+\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

(определитель дифференцируется построчно).

Пусть уравнение имеет вид

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots=0=y^{(n)}\cdot W(y_1,\ldots y_n)+y^{(n-1)}\cdot\frac{dW(y_1,\ldots y_n)}{dx}+\ldots\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -p_1(x)=\frac{W'}{W}\Rightarrow \ln|W|=-\int p_1(x)dx\Rightarrow W=W_0\cdot e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Полученное соотношение может быть полезно при решении линейных дифференциальных уравнений второго порядка $y''+p(x)y'+q(x)y=0$; если $y_1\not\equiv 0$ — частное решение, то

$$C\cdot e^{-\int p(x)dx}=\begin{vmatrix} y & y_1 \\ y' & y_1' \end{vmatrix}\Rightarrow -C\cdot e^{-\int pdx}=-yy_1'+y'y_1\Rightarrow d\left(\frac{y}{y_1}\right)\frac{-C\cdot e^{-\int pdx}}{y_1^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{y}{y_1}=\int\frac{Ce^{-\int pdx}}{y_1^2}dx+C_1\Rightarrow\Rightarrow y=y_1\left(\int\frac{Ce^{-\int pdx}}{y_1^2}dx+C_1\right)$$

— *формула Остроградского-Лиувилля.*

2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения.

Понижение порядка:

1. Если уравнение имеет вид $F(x,y^{(k)},\ldots y^{(n)})=0$, то замена $p=y^{(k)}$ приведёт к уравнению $(n-k)$-го порядка.

2. Если обе части уравнения представляются в виде полного дифференциала $F(x, y, \ldots y^{(n)}) = dg(x, y, \ldots y^{(n-1)}) = 0 \Rightarrow g(x, y, \ldots y^{(n-1)}) = C$.

3. Если известно частное решение $y_1 \not\equiv 0$ уравнения, то можно искать решение в виде $y = zy_1$; при подстановке в исходное уравнение получим уравнение $(n-1)$-го порядка.

4. Если в уравнение не входит x, то есть $F(y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$, то можно взять $y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'p$ и так далее — получим уравнение $(n-1)$-го порядка.

Определение: *линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$, где $a_1, \ldots a_n = \mathrm{const}$. *Характеристическим многочленом* такого уравнения называется многочлен $F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$. $F(\lambda) = 0$ называется *характеристическим уравнением*.

Теорема 1: $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ — корни характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами, имеющие кратность r_i. Тогда $\{e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \ldots x^{r_i-1}e^{\lambda_i x}\}_{i=1}^m$ — фундаментальная система решений этого уравнения.

$\triangle$ Пусть $F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$; $Ly \overset{def}{=} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y$; $\left(e^{\lambda x}u\right)^{(m)} = e^{\lambda x}(\lambda^m u + C_m^1 \lambda^{m-1}u' + \ldots + u^{(m)})$, поэтому $L(e^{\lambda x}u) = e^{\lambda x}(u(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n) + u'(n\lambda^{n-1} + a_1(n-1)\lambda^{n-2} + \ldots) + \ldots) = e^{\lambda x}\left(uF(\lambda) + u'\dfrac{F'(\lambda)}{1!} + \ldots\right) = e^{\lambda x} \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} u^i \cdot \dfrac{F^{(i)}(\lambda)}{i!}$. λ_i обращает в ноль первые $r_i - 1$ производных F, поэтому, для того, чтобы $e^{\lambda_i x}u$ являлось решением уравнения, необходимо и достаточно, чтобы $u^{(r)} \equiv \ldots u^{(n)} \equiv 0$. Поэтому все функции системы $\{e^{\lambda_i x}, xe^{-\lambda_i x}, \ldots x^{r_i-1}e^{-\lambda_i x}\}$ являются решениями; их линейная независимость следует из примеров линейно независимых систем в 2.1. $\blacksquare$

Пример (линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами): $y'' + py' + qy = 0$; $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ — характеристическое уравнение, а $\lambda_1,\ \lambda_2$ — его корни. Тогда возможны три случая —

1. $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$;
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$;
3. $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda_1 = \alpha + \beta i,\ \lambda_2 = \alpha - \beta i$; $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x}((C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta x)$; мы рассматриваем только действительный случай, поэтому условие $i(C_1 - C_2) \in \mathbb{R}$ приводит к решению вида $y = e^{\alpha x}(C_1' \cos\beta x + C_2' \sin\beta x)$.

Уравнение Эйлера: $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Сделаем замену $\begin{cases} x = e^t,\ x > 0 \\ x = -e^t,\ x < 0; \end{cases}$ при $x > 0$ $y_t' = y_x' e^t,\ y_{tt}'' = y_{xx}'' e^{2t} + y_x' e^t, \ldots \Rightarrow y_x' = \dfrac{y_t'}{e^t},\ y_{xx}'' = \dfrac{y_{tt}'' - y_t'}{e^{2t}}, \ldots$; аналогично при $x < 0$; таким образом получим линейное уравнение с постоянным коэффициентами на функцию $y(t)$.

Пример (рассеяние параллельного пучка частиц на одномерной мишени):

Пусть $V(x)$ — потеницал взаимодействия частиц пучка и мишени, тогда уравнение Шредингера можно записать как $i\hbar \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m} \cdot \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + V(x)\psi$, где $\psi(x, t)$ — волновая функция частиц пучка (вероятность нахождения частицы в точке x в момент времени t). (Само уравнение является одномерным случаем трёхмерного уравнения Шредингера $i\hbar \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m} \cdot \Delta\psi + V(x, y, z, t)\psi$). Будем считать, что переменные разделяются, то есть искать $\psi(x, t) = \psi_0(x)T(t)$; тогда

$$i\hbar \cdot \psi_0 T' = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot T\frac{d^2\psi_0}{dx^2} + V(x)\psi_0 T \Rightarrow i\hbar \cdot \frac{T'}{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\psi_0''}{\psi_0} + V(x) = E$$

(в разных частях уравнения находятся функции только одной переменной (T и x соответственно); это возможно лишь в том случае, когда обе части уравнения тождественно постоянны; постоянную можно обозначить через E, поскольку она имеет смысл энергии).

Таким образом, получим

$$\begin{cases} T' - \dfrac{E}{i\hbar} \cdot T = 0 \Rightarrow T(t) = T_0 \exp\left(\dfrac{E}{i\hbar} \cdot t\right) \\ \psi'' + (E - V)\psi = 0, \end{cases}$$

Рассмотрим только случай финитного потенциала (то есть $V : \exists\, a : \forall\, x : |x| \geq a\, V(x) = 0$); обозначим за I область $x < -a$, за II: $x > a$, за III: $x > a$. Очевидно, общее решение будет комбинацией решений для трёх областей: такое решение содержит шесть произвольных постоянных, четыре из которых определяются условиями непрерывности ψ и ψ' на границах областей, а пятая — условием нормировки $\left(\forall\, t \in \mathbb{R} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \psi(x, y, z, t) dV = 1\right)$. В результате, используя формулы для однородных уравнений с постояннымикоэффициентами и полагая $k = \sqrt{E}$, получим

	I	II
$\psi_1(k, x)$	$e^{ikx} + A(k)e^{-ikx}$	$B(k)e^{ikx}$
$\psi_2(k, x)$	$D(k)e^{-ikx}$	$e^{-ikx} + C(k)e^{ikx}$

(не будем интересоваться решением в области III, что сразу обеспечит большой произвол в выборе констант; в частности, примем одну из постоянных в областях I и II за 1, а другую — за 0; одна из оставшихся постоянных необходима для сохранения нормировки, а вторая произвольна; таким образом, получим два возможных решения, обозначенных как ψ_1 и ψ_2, — функции x и k, поскольку выбор постоянной E также произволен).

Пусть функции φ_1 и φ_2 являются решениями уравнения $\psi'' + (E - V)\psi = 0$; тогда

$$\begin{array}{l} \varphi_1'' - (V - k^2)\varphi_1 = 0 \mid \cdot \varphi_2 \\ \varphi_2'' - (V - k^2)\varphi_2 = 0 \mid \cdot \varphi_1 \end{array} \overset{+}{\Rightarrow} \frac{d}{dx}(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2) = 0 \Rightarrow W(\varphi_1, \varphi_2) = K,$$

причём значение K одинаково для частей одного и того же решения в областях I и II.

В области I $W(\psi_1, \psi_2) = W(e^{ikx} + Ae^{-ikx}, De^{-ikx}) = W(e^{ikx}, De^{-ikx}) + W(Ae^{-ikx}, De^{-ikx}) = DW(e^{ikx}, e^{-ikx})^{ikx}e^{-ikx} \cdot (-ik - ik) = -2ikD$; $W(\overline{\psi_1}, \psi_2) = W(\overline{A}e^{ikx}, De^{-ikx}) = -2ik\overline{A}D$; аналогично $W(\psi_1, \overline{\psi_2}) = 2ikA\overline{D}$, $W(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}) = 2ik\overline{D}$, $W(\psi_1, \overline{\psi_1}) = -2ik + 2ikA\overline{A}$, $W(\psi_2, \overline{\psi_2}) = 2ikD\overline{D}$.

В области II $W(\psi_1, \psi_2) = -2ikB$, $W(\overline{\psi_1}, \psi_2) = 2ik\overline{B}C$, $W(\psi_1, \overline{\psi_2}) = -2ikB\overline{C}$, $W(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}) = 2ik\overline{B}$, $W(\psi_1, \overline{\psi_1}) = -2ikB\overline{B}$, $W(\psi_2, \overline{\psi_2}) = 2ik - 2ikC\overline{C}$, а поскольку значения определителя Вронского для одинаковых решений в областях I и II совпадают, $B = D$, $\overline{A}D + \overline{B}C = 0$, $A\overline{A} + B\overline{B} = |A|^2 + |B|^2 = 1$, $|C|^2 + |D|^2 = 1$. Расмотрим $\mathbb{S} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ — матрицу рассеяния. Тогда

$$\mathbb{S}\mathbb{S}^+ = \begin{pmatrix} A\overline{A} + B\overline{B} & A\overline{B} + \overline{B}C \\ B\overline{A} + C\overline{B} & B\overline{B} + C\overline{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть матрица рассеяния $\mathbb{S}$ унитарна.

Построим решение уравнения Шредингера с помощью одной из функций — например, $\psi_1 : \varphi(x, t) = \psi_1(k, x)T(t)\psi_1(x, t)e^{-ik^2t} = C_1e^{i(kx - \omega t)} + C_2e^{-i(kx + \omega t)}$; физический смысл такого решения — две волны, распространяющиеся в разные стороны от барьера. Это означает, что частица, приближающаяся к мишени, может как отразиться от неё, так и преодолеть препятствие. $P_I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_1(x, t)|^2 dx = |A|^2$ — вероятность того, что частица останется в области I; $P_{II} = |B|^2$; $|A|^2 + |B|^2 = 1$, что соответствует определению вероятности (см. теория вероятностей, 2.1). Физический смысл C и D аналогичен, $B = D$ — то есть вероятность преодоления препятствия не зависит от направления подхода к нему.

2.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Теорема 1: решение неоднородного уравнения $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$ может быть представлено в виде $y = y_g + y_s$, где y_g — общее решение соответствующего однородного уравнения $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$, а y_s — частное решение неоднородного уравнения.

$\triangle$ Очевидно, что всякая функция $y = y_g + y_s$ будет решением неоднородного уравнения. Выберем фиксированное y_s, тогда $y_g^* = y - y_s$ — решение однородного уравнения и y представимо в виде $y = y_g^* + y_s$. $\blacksquare$

Непосредственный подбор частного решения: таким образом, для решения неоднородного уравнения достаточно решить соответствующее однородное и подобрать хотя бы одно частное решение неоднородного уравнения; поиск частного решения в общем случае достаточно сложен, однако для наиболее распространённых случаев известны простые алгоритмы.

1. $f(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ — многочлен степени m; если $x = 0$ не является корнем характеристического многочлена $F(x)$, то $y_s A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m$, коэффициенты $A_0, \ldots A_m$ могут быть найдены подстановкой в дифференциальное уравнение и решением системы $m + 1$ линейных уравнений. Если $x = 0$ является корнем $F(x)$ кратности r, то $y_s = x^r (A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m)$ (домножение на x^r необходимо для того, чтобы получаемая система линейных уравнений имела решение).

2. $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$ выберем $y_s = e^{\alpha x} u \Rightarrow$ (теорема 1, 2.2)

$$Ly_s = e^{\alpha x}\left(F(\alpha) u + \frac{F'(\alpha)}{1!} u' + \ldots + \frac{F^{(n)}(\alpha)}{n} u^{(n)}\right) = e^{\alpha x} P_m(x).$$

Таким образом, если $x = \alpha$ не является корнем $F(x)$, то $y_s = e^{\alpha x} Q_m(x)$, а если $x = \alpha$ — корень $F(x)$ кратности r, то $y_s = x^r e^{\alpha x} Q_m(x)$.

3.

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cdot\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + \right.$$
$$\left. + Q_l(x)\cdot\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot e^{(\alpha+\beta i)x}(P_m(x) + iQ_l(x)) + \frac{1}{2}\cdot e^{(\alpha-\beta i)x}(P_m(x) - iQ_l(x));$$

далее можно отдельно воспользоваться результатами п. 2 для $\frac{1}{2}\cdot P_m(x)(e^{(\alpha+\beta i)x} + e^{(\alpha-\beta i)x})$ и $\frac{1}{2}\cdot Q_l(x)(e^{(\alpha+\beta i)x} - e^{(\alpha-\beta i)x})$; получим, что, если $(\alpha + \beta i)$ не является корнем $F(x)$, то $y_s = e^{\alpha x}(R_p(x)\cos\beta x + T_p(x)\sin\beta x)$, где $p = \max\{m, n\}$, а $R_p,\ T_p$ — многочлены степени p. Если же $\alpha + \beta i$ — корень $F(x)$ кратности r, то $y_s = x^r e^{\alpha x}(R_p\cos\beta x + T_p\sin\beta x)$.

Замечание (принцип суперпозиции): пусть $L_i y = y^{(n)} + a_{1i} y^{(n-1)} + \ldots + a_{ni} y = f_i(x)$ $(i = \overline{1, m})$ — линейные неоднородные диф. уравнения, а $\varphi_i(x)$ — их решения; тогда $\forall\ \alpha_1, \ldots \alpha_m \in \mathbb{R}$ функция $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)$ будет решением уравнения $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i L_i\right) y = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)$. Таким образом, частное решение уравнения со сложной правой частью может быть найдено в виде линейной комбинации решений с более простыми правыми частями.

Метод вариации произвольных постоянных: пусть $\{y_1, \ldots y_n\}$ — фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x)$. Будем искать $y_s \sum\limits_{k=1}^{n} C_k(x) y_k$; тогда $y_s' = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k(x) y_k' + \sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k$; выберем $C_1(x), \ldots C_k(x) : \sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k = 0 \Rightarrow y_s'' = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k(x) y'' + \sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k'$. Аналогично выберем $C_1(x), \ldots C_n(x) : \sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k' = 0$. Проводя аналогичные операции, получим, что, если

$C_1'(x), \ldots C_n'(x)$ являются решениями однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_n'(x)y_k^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x), \end{cases}$$

то $y_s = \sum\limits_{i=1}^{n} C_k(x)y_k(x)$ будет решением неоднородного дифференциального уравнения. Определителем системы является $W(y_1 \ldots y_n) \neq 0$ (система функций $\{y_1, \ldots y_n\}$ линейно независима), поэтому система имеет невырожденное решение $C_1'(x), \ldots C_n'(x)$. Таким образом, поиск частного решения сводится к решению системы линейных уравнений на $C_k'(x)$ и последующему интегрированию решений.

Метод Коши: позволяет решать линейные неоднородные дифференциальные уравнения $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$ с начальными условиями $y'(x_0) = y''(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0)$. Выберем произвольное решение однородного уравнения и примем константы $C_1, \ldots C_n$ зависящими от переменной s; тогда можно построить *функцию Коши* $K(x,s) : K(s,s) = K'(s,s) = \ldots = K^{(n-2)}(s,s) = 0,\ K^{(n-1)}(s,s) = 1$. Выберем $y_s = \int\limits_{x_0}^{x} K(x,s)f(s)ds$ и покажем, что эта функция является частным решением.

$$y_s' = K(x,x)f(x) + \int\limits_{x_0}^{x} K_x'(x,s)f(s)ds \int\limits_{x_0}^{x} K_x'(x,s)f(s)ds\ (K(x,x) = 0\,\forall\, x \in \mathbb{R};$$

аналогично

$$y_s'' = \int\limits_{x_0}^{x} K_{xx}''(x,s)f(s)ds, \ldots y^{(n-1)} = \int\limits_{x_0}^{x} K_{x\ldots x}^{(n-1)}(x,s)f(s)ds,\ y_s^{(n)} = f(x) + \int\limits_{x_0}^{x} K_{x\ldots x}^{(n)}(x,s)f(s)ds.$$

При подстановке в исходное уравнение интегралы дадут ноль ($K(x,s)$ — общее решение однородного уравнения); останется $f(x)$, то есть y_s действительно является частным решением.

2.4. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Будем рассматривать уравнения вида $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$, где p и q — функции, аналитические на $\mathbb{R}$ (в данном случае будем называть *аналитической* на $E \subseteq \mathbb{R}$ функцию f, представимую на E в виде суммы степенного ряда — необходимым условием возможности такого представления является $f \in C^\infty(E)$; однако, согласно результатам комплексного анализа (см. ТФКП, 2.5), достаточно более слабого условия $f \in D(E)$).

Замечание: если $p(x)$ и $q(x)$ — функции, аналитические на $\mathbb{R}$, то и всякое решение уравнения $y'' + py' + q = 0$ будет аналитической функцией на $\mathbb{R}$ (непосредственно следует из теоремы 5 (1.1)).

Сделаем *замену Лиувилля* $y = v\exp(-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi$; тогда

$$y' = \exp(-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi \left(v' - \frac{1}{2}pv\right),\ y'' = \exp(-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi \left(v'' + 2v'\left(-\frac{1}{2}p\right) - \frac{1}{2}vp' + \frac{1}{4}vp^2\right).$$

Подствив в уравнение, получим $v'' - \frac{1}{2}vp' - \frac{1}{4}vp^2 + qv = 0$, то есть $v'' + \nu(x)v = 0$.

Преобразуем начальные условия на y в начальные условия на v: $v(x_0) = a_0,\ v'(x_0) = a_1$. $\nu(x)$ — аналитическая на $\mathbb{R}$, поэтому, согласно замечанию, v также аналитическая на $\mathbb{R}$. Рассмотрим $v_0(x) = a_0 + a_1(x - x_0),\ v_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (\xi - x)\nu(x)v_{n-1}(\xi)d\xi,\ v(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k(x)$. Покажем, что такой функциональный ряд сходится, а его сумма удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению: для этого сначала докажем, что $\forall\ x \in \mathbb{R}\ |v_n(x)| \leq \frac{\mu}{n!}M^n(x - x_0)^{2n}$, используя метод математической индукции ($\mu = |v_0(x)|,\ M = \sup\limits_{[x_0,x]}|\nu(\xi)|$).

Очевидно, $|v_0(x)| \leq \mu$; предположим, что $|v_m(x)| \leq \frac{\mu}{m!}M^m(x - x_0)^{2m}$; тогда

$$|v_{m+1}(x)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} (\xi - x)\nu(x)v_m(\xi)d\xi\right| \leq M\left|\int\limits_{x_0}^{x} (\xi - x) \cdot \frac{\mu}{m!}M^m(\xi - x_0)^{2m}d\xi\right| =$$

$$= \frac{\mu}{m!}M^{m+1} \cdot \frac{|x - x_0|^{2m+2}}{2m + 2} \leq \frac{\mu}{(m + 1)!}M^{m+1}|x - x_0|^{2m+2}.$$

Таким образом, функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k(x)$ ограничен сврху степенным рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_kx^k$, $a_{2k} = \frac{\mu}{k!}M^k$. По формуле Д'Аламбера (см. математический анализ, 5.2.3),

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mu\left(\frac{n}{2} + 1\right)!M^{\frac{n}{2}}}{\mu\left(\frac{n}{2}\right)!M^{\frac{n}{2}+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{k}{2} + 1}{M} = \infty$$

— радиус сходимости степенного ряда. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ и $\exists\ v(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k(x)$. $v_n' = (x - x)\nu v_{n-1} + \int\limits_{x_0}^{x}(-1)\nu(\xi)v_{n-1}(\xi)d\xi = -\int\limits_{x_0}^{x}\nu(\xi)v_{n-1}(\xi)d\xi \Rightarrow v_n'' = -\nu v_{n-1}$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k''(x)$ сходится равномерно, а $v \in C^2(\mathbb{R}),\ v'' = \sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k''(x) = -\nu(x)\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_{k-1}(x) = \nu(x)v(x) \Rightarrow v'' + \nu v = 0$, то есть $v(x)$ действительно является решением диф. уравнения.

Покажем, что решение, найденное таким способом, единственно: пусть существуют два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$, удовлетворяющие одинаковым начальным условиям $u_1(x_0) = u_2(x_0) = a_0,\ u_1'(x_0) = u_2'(x_0) = a_1$. Рассмотрим функцию $w = u_1 - u_2$, также являющуюся решением ($w(x_0) = w'(x_0) = 0$). $w'' + \nu w = 0 \Rightarrow w''' + \nu'w + \nu w' = 0$; подставив значения в точке x_0, получим $w''(x_0) = w'''(x_0) = 0$; аналогично $w^{(4)}(x_0) = \ldots = 0$, то есть все коэффициенты Тейлора для w в точке x_0 равны нулю, а значит $w \equiv 0$ и $u_1 \equiv u_2$.

Пример (уравнение Эйри): $y'' - xy = 0$.

Будем искать решение в виде аналитической функции, то есть $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_kx^k \Rightarrow y' = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{k+1}(k + 1)x^k,\ y'' = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{k+2}(k + 2)(k + 1)x^k$. Подставив в уравнение, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{k+2}(k + 2)(k + 1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} A_{k-1}x^k = 0 *_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_{k+2}(k + 2)(k + 1) - A_{k-1})x^k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_2 = 0,\ A_{k+2} = \frac{A_{k-1}}{(k + 2)(k + 1)}.$$

Таким образом, $A_2 = A_5 = A_8 = \ldots = 0$. Коэффициенты A_0 и A_1 определяются начальными условиями и позволяют найти $A_{3k},\ A_{3k+1}$. Пусть, например,

$$y(x_0) = 1,\ y'(x_0) = 0 \Rightarrow A_{3k} = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{k} 3i(3i-1)},\ A_{3k+1} = 0.$$

Тогда $y(x) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{\prod\limits_{i=1}^{k} 3i(3i-1)}$.

Рассмотрим теперь более сложный случай — уравнения вида $x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$, где p и q — аналитические функции (к такому виду может быть приведено уравнение $y'' + p_1(x)y' + q_1(x)y = 0$, где функции p_1 (q_1) имеют в некоторой точке x_0 полюс первого (второго) порядка (это означает, что функции $xp_1(x)$ ($x^2q_1(x)$) могут быть разложены в степенной ряд в точке x_0, подробнее см. ТФКП, 3.3)). Будем искать решение в виде обобщённого степенного ряда $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+\alpha}$ $(\alpha \neq 0) \Rightarrow y' = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)A_k x^{k+\alpha-1},\ y'' = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)(k+\alpha-1)A_k x^{k+\alpha-2}$. Подставляя в уравнение, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)(k+\alpha-1)A_k x^{k+\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)A_k x^{k+\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+\alpha} = 0.$$

Обозначим $f_0(\alpha) = \alpha(\alpha-1) + p_0\alpha + q_0,\ f_k(\alpha) = p_k\alpha + q_k$ и приравняем коэффициенты при x^α: $\alpha(\alpha-1)A_0 + p_0\alpha A_0 + q_0 A_0 = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha-1) + \alpha p_0 + q_0 = 0$ — квадратное уравнение относительно α, имеющее два корня: α_1 и α_2. Приравняв коэффициенты при других степенях x, получим рекуррентную формулу на коэффициенты A_k: $f_0(k+\alpha)A_k + f_1(k+\alpha-1)A_{k-1} + \ldots = 0$, позволяющую найти A_k с помощью α_1 (α_2) и начальных условий.

Однако решения, найденные таким способом, могут оказаться линейно зависимыми — в случае $\alpha_1 - \alpha_2 = s \in \mathbb{Z}$ (так называемый *резонансный* случай); для того, чтобы получить фундаментальную систему решений, воспользуемся формулой Остроградского-Лиувилля (см. 2.1): если y_1 — решение, найденное с помощью α_1, то

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{\exp\left(-\int \frac{p(\xi)d\xi}{\xi}\right)}{y_1^2} = \int e^{-p_0 \ln x} \cdot \exp\left(-\int \sum_{k=1}^{\infty} p_k \xi^{k-1} d\xi\right) \cdot \frac{dx}{y_1^2} =$$

($\alpha_1,\ \alpha_2$ удовлетворяют квадратному уравнению $\alpha_2 + (p_0 - 1)\alpha + q_0 = 0$, поэтому, по теореме Виета, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - p_0 \Rightarrow -p_0 = -1 + \alpha_1 + \alpha_2 = -1 - s + 2\alpha_1$)

$$= \int \exp\left(-\int \sum_{k=1}^{\infty} p_k \xi^{k-1} d\xi\right) \cdot \frac{x^{-1-s}x^{2\alpha_1}dx}{y_1^2} =$$

(интеграл и экспонента от аналитической функции являются аналитическими функциями, $y_1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+\alpha_1}$, поэтому подинтегральные сомножители дадут в итоге аналитическую функцию)

$$= \int x^{-1-s}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k x^k\right) dx = \frac{x^{-s}}{-s} + g_s \ln x + \sum_{k=1}^{s-1} g_k \cdot \frac{x^{k-s}}{k-s} + \sum_{k=s+1}^{\infty} g_s \cdot \frac{x^{k-s}}{k-s} =$$

$$= g_s \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} g'_k x^{k-s},$$

где $g'_0 = -\dfrac{1}{s},\ g'_s = 0,\ g'_k = g_k\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ k \neq s$. Таким образом, $y_2 = g_s \ln x \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+\alpha+1} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k x^k \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} g'_k x^{k+\alpha_2}$. В конечном счёте получим следующее решение ($\varphi(x), \psi(x)$ — аналитические функции):

Нерезонансный случай: $y_1 = x^{\alpha_1}\varphi,\ y_2 = x^{\alpha_2}\psi$;

Резонансный случай: $y_1 = x^{\alpha_1}\varphi,\ y_2 = g_s x^{\alpha_1}\varphi + x^{\alpha_2}\varphi\psi$.

Пример (уравнение Бесселя): $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ $(n \in \mathbb{R})$.

Сделаем замену Лиувилля

$$y = v \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}\right) = \frac{v}{\sqrt{x}} \Rightarrow x^2v'' + \left(x^2 + \left(\frac{1}{4} - n^2\right)\right)v = 0.$$

При $n = \pm\dfrac{1}{2}$ получим $v'' + v = 0 \Rightarrow v(x) = C_1\cos x + C_2\sin x \Rightarrow y(x) = \dfrac{C_1}{\sqrt{x}}\cos x + \dfrac{C_2}{\sqrt{x}}\sin x$. При $n \neq \pm\dfrac{1}{2}$ будем искать решение в виде обобщённого степенного ряда $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+\alpha}$. Уравнение на α имеет вид $\alpha(\alpha-1)+\alpha-n^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2-n^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm n$; $f_0(\alpha) = \alpha^2-n^2,\ f_1 \equiv 0,\ f_2 \equiv 1,\ f_3 \equiv \ldots \equiv 0$, поэтому

$$A_k((k+\alpha^2) - n^2) + A_{k-2} = 0 \Rightarrow (\alpha = n)\ A_k = -\frac{A_{k-2}}{k(k+2n)},$$

$$A_{2k} = \frac{(-1)^k A_0}{2^{2k}\cdot k!(n+1)\ldots(n+k)},\ A_{2k+1} = 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, одно из решений найдено; в нерезонансном случае можно аналогично найти второе, линейно независимое решение, то есть и общее решение; в резонансном случае следует применить формулу Остроградского-Лиувилля. Однако оказывается, что в некоторых случаях решения уравнения Бесселя имеют особое значение для математики. Рассмотрим $A_0 = \dfrac{1}{2^n\cdot\Gamma(n+1)} \Rightarrow A_{2k} = \dfrac{(-1)^k\cdot\Gamma(n+1)}{2^{2k}\cdot k!\cdot\Gamma(n+k-1)}A_0$; решение

$$y = J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\cdot\Gamma(n+k+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

называется *функцией Бесселя первого рода*. Если $n \notin \mathbb{Z}$, то функции Бесселя J_n и J_{-n} представляют собой два линейно независимых решения уравнения Бесселя. При $n \in \mathbb{Z}$ второе линейно независимое решение $Y_n(x)$ может быть найдено по формуле Остроградского-Лиувилля и носит название *функции Бесселя второго рода*. Функции Бесселя относятся к специальным функциям математики и иногда называются также *цилиндрическими*.

Замечание: $\forall\, n \in \mathbb{Z}\ J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

$\triangle$ Пусть $n > 0$ (при $n = 0$ утверждение очевидно, а при $n < 0$ сводится к доказанному заменой $k = -n$). $J_{-n}(x)\sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!\cdot\Gamma(-n+k+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k-n}$ (суммирование начинается с n, поскольку при $k < n$ аргумент Γ-функции отрицателен, и соответствующие члены обращаются в ноль). $l = k-n \Rightarrow J_{-n}(x) = (-1)^n\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^l}{(l+n)!\cdot\Gamma(l+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2l+n} = (-1)^n\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^l}{l!\cdot\Gamma(n+l+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2l+n} = (-1)^n J_n(x)$ (здесь было использовано одно из основных свойств Γ-функции: $\Gamma(n+1) = n!\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ — см. математический анализ, 6.3.2). $\blacksquare$

Теорема 1: $xJ_{n+1}(x) = nJ_n(x) - xJ'_n(x)$.

$$\triangle\ \frac{d}{dx}\frac{J_n}{x^n} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\cdot 2^{2k+n}\cdot\Gamma(n+k+1)}x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2k}{k!\cdot 2^{2k+n}\cdot\Gamma(n+k+1)}x^{2k-1} =$$

$$= \text{ (заменим индекс суммирования на } k-1\text{) } = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!\cdot 2^{2k+n+1}\cdot\Gamma(n+k+2)}x^{2k+1} =$$

$$= \frac{-1}{x^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\cdot\Gamma(n+k+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1+n} = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^n};$$

но, с другой стороны,

$$\frac{d}{dx}\frac{J_n}{x^n} = \frac{J'_n x^n - nJ_n x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{J'_n}{x^n} - \frac{nJ_n}{x^{n+1}} = -\frac{J_{n+1}}{x^n} \Rightarrow xJ_{n+1} = nJ_n - xJ'_n. \blacksquare$$

Теорема 2 (без доказательства): функции $J_n(x)$ имеют бесконечное число нулей при любых значениях n, причём между любыми "соседними"нулями J_n находится ровно один ноль функции J_{n+1}. Также при $x \to \infty$ выполняются асимптотические формулы

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right),\ J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\left(\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1})\right).$$

3. Системы дифференциальных уравнений.

3.1. Общие принципы решения.

Будем рассматривать только системы уравнений первого порядка, то есть соотношения вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots x_n, t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots x_n, t) \end{cases} \qquad (1)$$

Теорема 1 (без доказательства): $\Pi = \{(t, x_1, \dots x_n) |\, |t - t_0| \le a,\ |x_j - x_j^0| \le b\, \forall\, j = \overline{1, n}\}$; если в системе (1) $f_i \in C(\Pi)\ \forall\ i = \overline{1, n}$ и $\forall\ (t, x_1, \dots x_n),\ (t, z_1, \dots z_n) \in \Pi\ |f_i(t, x_1, \dots x_n) - f_i(t, z_1, \dots z_n)| \le L \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - z_k|\ \forall\ i = \overline{1, n}$, то при заданном начальному условии $\overrightarrow{x}(t_0)\overrightarrow{x_0}$ существует ровно одно решение системы (1), удовлетворяющее этому условию.

Определение: пространство $(x_1, \dots x_n)$ называется *фазовым пространством* системы дифференциальных уравнений (в более общем случае фазовым пространством называется пространство $(x_1, \dots x_n, x'_1, \dots x'_n)$, однако в нашем случае систем диф. уравнений первого порядка n координат такого $2n$-мерного пространства оказываются вырожденными, что позволяет рассматривать только сечение $(x_1, \dots x_n)$ фазового пространства). Кривые, заданные на фазовом пространстве решениями $\overrightarrow{x}(t)$, называются *фазовыми траекториями* системы.

Теорема 2: в условиях теоремы 1 фазовые траектории системы диф. уравнений первого порядка не пересекаются.

$\triangle$ Пусть t_0 – точка пересечения фазовых траекторий, соответствующих решениям $\overrightarrow{x_1},\ \overrightarrow{x_2}$; тогда $\overrightarrow{x_1}(t_0) = \overrightarrow{x_2}(t_0)$, то есть двум различным решениям соответствует одно начальное условие, что невозможно согласно теореме 1. Таким образом, фазовые траектории не пересекаются. $\blacksquare$

Метод редукции: для решения системы $\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases}$ продифференцируем первое уравнение по x. Тогда $x'' = f'_t + f'_x \cdot x' + f'_y \cdot y' = f'_t + f'_x \cdot x' + f'_y \cdot g(t, x, y)$; если выполняются условия теоремы о неявной функции, то можно найти $y = \varphi(x, x', t)$ и, подставив в первое уравнение системы, получить дифференциальное уравнение второго порядка относительно x. Очевидно, тот же способ можно применять и для случая большего числа уравнений, что, однако, приведёт к уравнению высокого порядка на x.

Более простое решение возможно в случае системы линейных дифференциальных уравнений, то есть системы вида $\dfrac{d\overrightarrow{x}}{dt} = \mathbb{A} \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{F}$. Рассмотрим вначале случай однородной системы уравнений (то есть $F \equiv 0$): очевидно, достаточно найти n линейно независимых решений такой системы, а затем заметить, что всякая линейная комбинация этих решений также будет являться решением системы (это легко показать, проводя действия, аналогичные тем, что были осуществлены в 2.1). Для поиска линейно независимых решений представим $\overrightarrow{x}$ в виде $\overrightarrow{x} = e^{kt} \cdot \overrightarrow{b} \Rightarrow \overrightarrow{x'} = k\overrightarrow{x},\ k\overrightarrow{x'} = \mathbb{A} \cdot \overrightarrow{x} \Rightarrow (\mathbb{A} - k\mathbb{E})\overrightarrow{x} = 0$. Таким образом, задача свелась к нахождению собственных значений матрицы $\mathbb{A}$, а решения $\overrightarrow{x}$ являются её собственными векторами. В случае $\operatorname{rank} \mathbb{A} = n$ матрица имеет n линейно независимых собственных векторов $\overrightarrow{a_1}, \dots \overrightarrow{a_n}$, а решение запишется как $\overrightarrow{x} = C_1 e^{k_1 t} \cdot \overrightarrow{a_1} + \dots + C_n e^{k_n t} \cdot \overrightarrow{a_n}$ (если среди собственных чисел есть комплексные (а точнее – пары комплексно сопряжённых чисел $(\alpha_{i_1} = \overline{\alpha_{i_2}})$, являющихся корнями характеристического многочлена $\mathbb{A}$), то, дабы сделать их "вклад" в решение действительным, следует брать $C_{i_1} \cdot \operatorname{Re}(e^{\alpha_{i_1} t}\overrightarrow{a_1}) + C_{i_2} \cdot \operatorname{Im}(e^{\alpha_{i_2} t}\overrightarrow{a_2}) =$

$C_{i_1}\cdot\begin{pmatrix}\operatorname{Re} a_{11}\\ \operatorname{Re} a_{12}\end{pmatrix}\cos\alpha_{i_1}t+C_{i_2}\begin{pmatrix}\operatorname{Im} a_{21}\\ \operatorname{Im} a_{22}\end{pmatrix}\sin\alpha_{i_2}t)$. Если же $\operatorname{rank}\mathbb{A} < n$, то кратность некоторых собственных чисел $\mathbb{A}$ отлична от единицы; для такх собственных чисел в решение входят члены вида $\begin{pmatrix}\gamma_1+\beta_1 t\\ \gamma_2+\beta_2 t\end{pmatrix}\cdot e^{\alpha t}$; очевидно, составляющие этого решения $\overrightarrow{c_1}e^{\alpha t}$ и $\overrightarrow{c_2}te^{\alpha t}$ линейно независимы.

В случае неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений общее решение (как и для одного уравнения — см. 2.3) может быть представлено в виде общего решения соответствующей системы однородных уравнений и частно решения системы неоднородных уравнений; применимы как непосрдественный поиск частных решений, так и метод вариации постоянных — см. 2.3.

3.2. Особые точки системы дифференциальных уравнений.

Классификация особых точек:

1. *Узел* — все решения бесконечно близко подходят к особой точке и не удаляются от неё, причём каждое решение подходит под одним и тем же, фиксированным углом.

2. *Седло* — в любой окрестности точки существует решение, которое, приблизившись, начинает от неё удаляться.

3. *Центр* — решения образуют замкнутые траектории, содержащие внутри себя особую точку.

4. *Фокус* — решения бесконечно близко подходят к особой точке, причём для каждого решения направление меняется в зависимости от радиуса окрестности.

Более подробная классификация и иллюстрации приведены в 3.2.

Определение: *положением равновесия* (*особой точкой*) системы дифференциальных уравнений называется точка, в которой $x' = y' = 0$. Положение равновесия (x_0, y_0), достигаемое в точке t_0 называется *устойчивым* (по Ляпунову), если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall\ t_1 : |t_1 - t_0| < \delta,\ \forall\ t > t_1\ |x(t)-x_0| < \varepsilon,\ |y(t)-y_0| < \varepsilon$ (следует иметь в виду, что есть и другие определения устойчивости — не только по Ляпунову).

Будем рассматривать только случай системы двух линейных однородных уравнений; это позволит описать основные типы особых точек и те случаи, в которых они возникают: пусть система имеет вид

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y; \end{cases} \quad \text{сначала исследуем случай} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

λ_1, λ_2 — собственные числа матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

I. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R};\ \lambda_1 \neq \lambda_2$ — решение имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t} \\ y = C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

1) $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow x, y \to 0,\ t \to +\infty;\ x, y \to \infty,\ t \to -\infty$ — такой тип особой точки называется *узлом*; $e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t} \downarrow$, то есть решения стремятся к положению равновесия — точке (0,0); это *устойчивый узел*.

2) $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow x, y \to \infty,\ t \to +\infty;\ x, y \to 0,\ t \to -\infty$ — это также узел, который, очевидно, является *неустойчивым*.

3) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_1 \\ y = C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2; \end{cases}$ Решения "подходят"к положению равновесия (точке (0,0)), но затем начинают от неё удаляться. При $\lambda_1 > 0$ и $\to -\infty$ решение стремится

к прямой $y = \dfrac{\beta_2}{\beta_1}x$, а при $t \to +\infty$ – к прямой $y = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}x$; в случае $\lambda_1 < 0$ реализуется обратный случай. Такая особая точка называется *седлом* и всегда является неустойчивой.

II. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $(\lambda_1, \lambda_2 = p \pm qi,\ q \neq 0)$. Решение имеет вид

$$\begin{cases} x = e^{pt}(C_1\alpha_1 \cos qt + C_2\alpha_1 \sin qt) \\ y = e^{pt}(C_1\alpha_2 \cos qt + C_2\alpha_2 \sin qt). \end{cases}$$

1) $p < 0 : (x, y) \to (0, 0),\ t \to +\infty$ $(e^{pt} \to 0$, а $C_1 \cos qt + C_2 \sin qt$ – периодическая и ограниченная функция); таким образом, решения имеют вид спиралей, сходящихся к началу координат. Такая особая точка называется *фокусом*, который в данном случае устойчив.

2) $p > 0$ – решения имеют тот же вид, что и в предыдущем случае, однако $(x, y) \to \infty,\ t \to +\infty$, поэтому фокус является неустойчивым.

3) $p = 0 \Rightarrow \lambda_1,\ \lambda_2 = \pm qi$; $\begin{cases} x = \alpha_1(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt) \\ y = \alpha_2(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt). \end{cases}$ Решения периодичны, но траектории не сходятся к положению равновесия, а являются замкнутыми. Такая особая точка называется *центром* и, очевидно, является устойчивой.