Лекция 6

Ряды Тейлора для основных элементарных функций

Если $f(x) \in C^{\infty}\,(окр. x=0)$ и $\left|f^{(n)}(x)\right| \le c, n = 0,1,\ldots, x \in O(0)$, то функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Тейлора.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Приведем разложения для основных элементарных функций.

$e^x, |x| < c$

$$\left|\left(e^x\right)^{(n)}\right| = \left|e^x\right| \le e^c, \qquad \left(e^x\right)^{(n)}_{x=0} = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbf{R}$$

$$a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n$$

$\sin x$:

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right| = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)\right| \le 1$$

$$(\sin x)^{(n)}_{x=0} = \begin{cases} 0, n - четное \\ (-1)^k, n = 2k+1 - нечетное \end{cases}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, x \in \mathbf{R}$$

$\cos x$:

$$\left|(\cos x)^{(n)}\right| = \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)\right| \le 1$$

$$(\cos x)^{(n)}_{x=0} = \begin{cases} 0, n - нечетное \\ (-1)^k, n = 2k - четное \end{cases}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, x \in \mathbf{R}$$

$\ln(1+x)$:

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, x \in [-1;1]$$

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x}, |x| < 1 (геометрическая\ прогрессия)$$

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) + c$$

$$\ln(1+x) + c = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

$$x = 0, \ln 1 = 0, c = 0$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, x \in (-1;1]$$

Для $x > 1$ логарифмы$(1+x)$ вычисляются следующим образом. Аргумент логарифма заменяется выражением $\frac{1+t}{1-t}$, например:

$$\ln 5 = \ln\frac{1+2/3}{1-2/3} = \ln(1+\frac{2}{3}) - \ln(1-\frac{2}{3})$$

$$5 = \frac{1+t}{1-t}, t = \frac{2}{3}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n = f(x)$$

$$\alpha \geq 0 \Rightarrow x \in [-1;1]$$

$$-1 < \alpha < 0 \Rightarrow x \in (-1;1]$$

$$\alpha \leq -1 \Rightarrow x \in (-1;1)$$

$$(1+x)\cdot f'(x) = \alpha\cdot f(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{1+x}; \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int\frac{\alpha dx}{1+x}$$

$$\ln f(x) = \alpha\ln(1+x)$$

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, x \in (-1;1)$$

Проинтегрировав в пределах от 0 до x, получим:

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots. = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

сходится при $x \in (-1;1]$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

$$arcctgx = \frac{\pi}{2} - arctgx$$

$$arctgx = arcctg\frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n} =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}x^{2n} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^{2n}$$

$$\arcsin x = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\cdot(2n+1)}x^{2n+1}$$