

Лекция 9

Дифференциальное уравнение n -ного порядка.

Дифференциальным уравнением n -ного порядка называется уравнение вида:

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ для нахождения единственного решения необходимо знать начальные условия $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Уравнения допускающие понижение порядка.

Можно отыскать решение этого уравнения, если уравнение имеет один из нижеследующих видов:

- 1) $y'' = f(x)$, решается двойным интегрированием.
- 2) $F(x, y', y'') = 0$, делаем замену $y' = p(x), y'' = p'$
- 3) $F(y'', y', y) = 0$, тогда $p = y', p' = p(y), p$ – параметр, $y'' = (p(y))'_x = p'_x y'_x = p' p$

Пример 1:

$$y'' y = (y')^2$$

обозначим $p = y', p' = p(y)$, где p – параметр, тогда $p p' y = p^2$

рассмотрим несколько случаев

- 1) $p=0 \Rightarrow y=c$
- 2) $p \neq 0 \Rightarrow p' y = p$ или $p'/p = 1/y \Rightarrow dp/p = dy/y$
 $\ln p = \ln y + c, p = cy, y' = cy, dy/y = c dx \Rightarrow y = ce^{cx}$

Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = q(x) \quad (1)$$

При $q=0$, уравнение называется однородным, $q \neq 0$ неоднородным.

$y' + p y = q$ – дифференциальное уравнение первого порядка.

$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$. если p_1 и p_2 непрерывны в рассматриваемой области, то $\exists$! 1-ая диф. кривая $\Rightarrow$ единственное решение дифференциального уравнения.

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \Rightarrow y = y(x)$$

Обозначим левую часть уравнения (1) при $q(x)=0$ $L(y) \Rightarrow L(y)=0$.

Отметим два свойства $L(y)$.

- 1) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$
- 2) $L(Cy) = CL(y)$

Линейная зависимость функций

Функции $y_1, \dots, y_n$ называются линейно зависимыми, если $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n (|\lambda_1| + \dots + |\lambda_n| \neq 0)$ такие что $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n = 0$ соответственно функции называются линейно независимыми если не удовлетворяют уравнению (1).

Определитель Вронского.

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ y_1'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Теорема 1.

Если функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ (все функции и их производные непрерывны и существуют до $n-1$ го порядка) линейно зависимы, то $W(y_1, \dots, y_n) = 0$.

Д-во.

Так как функции линейно зависимы, то $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n = 0$ после дифференцирования получим:

$$\lambda_1 y_1' + \dots + \lambda_n y_n' \equiv 0$$

$$\lambda_1 y_1'' + \dots + \lambda_n y_n'' \equiv 0,$$

...

$$\lambda_1 y_1^{(n-1)} + \dots + \lambda_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \quad \text{Эта система имеет ненулевое решение} \Leftrightarrow \text{когда}$$

определитель этой системы равен 0. А этот определитель и есть определитель Вронского.

Если $W \neq 0$ хотя бы в одной точке то функции линейно независимы.

Пример 1

Покажем, что если определитель равен нулю, то функции необязательно линейно зависимы. $f_1(x) = \begin{cases} x_2, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, x \geq 0 \\ x^2, x < 0 \end{cases} \quad W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = 0$

Рассмотрим произвольную точку $x_0 > 0$.

Утв. Если функции линейно независимы, то $W=0$

Если $W=0$, то неизвестно зависимы функции или нет.

Если $W \neq 0$ в какой-либо точке, то функции линейно независимы.

Теорема 2 Пусть $y_1, \dots, y_n$ решения уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$ и

$$W(y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)) = 0, \quad x_0 \in (a; b) \quad \text{тогда} \quad W(y_1(x), \dots, y_n(x)) = 0, \quad \forall x \in (a; b)$$

Следствие: если $W(y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)) \neq 0$ хотя бы в одной точке (a, b) тогда $\forall x \in (a, b)$ $W(x) \neq 0$.

Д-во

Так как $W=0$ в x_0 , то
$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$
 так как определитель = 0 то его строки и

столбцы и строки линейно зависимы (их линейная комбинация равна 0). Значит

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x_0) + \dots + \lambda_n y_n(x_0) = 0 \\ \lambda_1 y_1'(x_0) + \dots + \lambda_n y_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ \lambda_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $y = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n = 0$ $L(y)=0$, т.е. y - решение дифференциального

уравнения. Следовательно,
$$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad (*) \quad \text{(первая строка в системе). Решение } y \equiv 0$$

удовлетворяет (1) но начальным условиям удовлетворяет только одно решение (по теореме о существовании единственного решения). Получаем, что $W=0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Пример 1

$y^{(n)}=0$ Решения: $y_1=1, y_2=x, y_3=x^2, \dots, y_n=x^{n-1}$

$$W(1, x, x^2, \dots, x^{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 0 & 1 & 2x & \dots & (n-1)x^{n-2} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)! \end{vmatrix} \neq 0 \text{ этот определитель равен произведению}$$

чисел на главной диагонали (а все эти числа отличны от нуля), следовательно определитель отличен от нуля, следовательно функции линейно независимы.

Пример 2.

$$W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} = -1 \text{ Значит функции линейно независимы.}$$

Пример 3

$y_1 = e^{\alpha_1 x}, \dots, y_n = e^{\alpha_n x}$

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 x} & \dots & e^{\alpha_n x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \dots & \alpha_n e^{\alpha_n x} \\ \vdots & & \\ (\alpha_1)^{n-1} e^{\alpha_1 x} & \dots & (\alpha_n)^{n-1} e^{\alpha_n x} \end{vmatrix} \neq 0 = e^{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)x} * \prod_{i>j} (\alpha_i - \alpha_j)$$

Фундаментальная система решений есть полная система решений дифференциального уравнения.