Лекция №10.

4.10.2002

Фундаментальная система решений линейного однородного уравнения

$$L(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \qquad \text{Начальные условия:} \qquad \begin{cases} x_0 \in (a;b) \\ y_1, \dots, y_n - \text{решения} \\ C_1, \dots, C_n - \text{произвольные} \\ \text{постоянные} \\ C_1 y_1 + \dots + C_n y_n = y - \text{решения} \end{cases}$$

<u>Определение</u>: Любые n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ного порядка называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

<u>Теорема</u>: Решения $y_1, \dots, y_n$ уравнения образуют фундаментальную систему решений этого уравнения тогда и только тогда, когда их определитель Вронского $W(x)$ отличен от 0 хотя бы в одной точке

$$L(y) = C_1 L(y_1) + \dots + C_n L_n(y_n)$$

$$x_0 \in (a;b). \quad W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y'_1 & \cdots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - \text{Определитель Вронского.}$$

<u>Теорема</u>: Для любого линейного однородного дифференциального уравнения существует фундаментальная система его решений.

<u>Доказательство</u>: Пусть

$$y_1(x_0) = 1, y'_1(x_0) = \dots = y_1^{(n-1)} = 0$$

$$y_2(x_0) = 0, y'_2(x_0) = 1, y''_2(x_0) = \dots = y_2^{(n-1)} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n(x_0) = \dots = y_n^{(n-2)}(x_0) = 0, y_n^{(n-1)} = 1.$$

Тогда определитель Вронского запишется так:

$$W(y_1(x_0)\ldots,y_n(x_0))=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\cdots&0\\0&1&0&0&\cdots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1\Rightarrow$$

Систем линейно независима, поэтому она образует фундаментальную систему решений:

$y_1(x),\ldots,y_n(x)$ – фундаментальная система решений.

$\underline{y=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)}$ – обшее решение.

$\exists C_1,\ldots,C_n : y(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ (линейная комбинация базисной системы), $x\in(a;b)$; $y_1,\ldots,y_n$ – фундаментальная система решений; y – произвольное решение.

$$\begin{cases}C_1y_1(x_0)+\ldots+C_ny_n(x_0)=y(x_0)\\C_1y'_1(x_0)+\ldots+C_ny'_n(x_0)=y'(x_0)\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}(x_0)\end{cases},W\neq0\Rightarrow\exists!\text{решение}\Rightarrow\exists\,(C_1,\ldots,C_n).$$

$$\tilde{y}(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$$

$$\begin{cases}\tilde{y}(x_0)=y(x_0)\\\tilde{y}'(x_0)=y'(x)\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\tilde{y}^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}(x_0)\end{cases}\qquad y(x)\equiv\tilde{y}(x)$$

Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$L(y)=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0;\quad a_1,\ldots,a_n\in\mathbf{R}$$

<u>Частные случаи</u>:

$n=2$:

$y''+a_1y'+a_2y=0\quad(1)$

$y=e^{\lambda x}\quad y'=\lambda e^{\lambda x}\quad y''=\lambda^2e^{\lambda x}$. Подставим в (1) $\Rightarrow$

$\lambda^2e^{\lambda x}+a_1\lambda e^{\lambda x}+a_2e^{\lambda x}=0\Rightarrow\underline{\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0}\quad(2)$

1) $\lambda_1\neq\lambda_2$. Дискриминант уравнения (2) равен

$D = a_1^2 - 4a_2 > 0 \Rightarrow$ фундаментальная система для (1):

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \\ y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \end{cases} \Rightarrow \text{любое общее решение запишется так:} \quad \boxed{y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$$

ПРИМЕР:

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2.$$

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}}$$

2) $\lambda_1 = \lambda_2$ В таком случае : $D = a_1^2 - 4a_2 = 0$ и $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

$$(\lambda - \lambda_1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = -2\lambda_1 \\ a_2 = \lambda_1^2 \end{matrix} \Rightarrow y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \qquad y_2(x) = x \cdot e^{\lambda_1 x}$$

$$\begin{matrix} y'_2 = e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x} \\ y''_2 = x\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} \end{matrix} \Rightarrow \text{Исходное уравнение примет вид :}$$

$$x\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + a_1\left(e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x}\right) + a_2 x e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x}\left(x(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2) + \underbrace{2\lambda_1 + a_1}_{=0}\right) = 0$$

Поэтому определитель Вронского запишется так:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & x e^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda_1 & 1 + x\lambda_1 \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x} \neq 0 \Rightarrow$$

Общее решение: $\boxed{y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}}$

3) $D = a_1^2 - 4a_2 < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\dfrac{a_1}{2} \pm i\sqrt{-D}$ – комплексное число :

$$\alpha = -\frac{a_1}{2}; \quad \beta = \sqrt{-D} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \end{cases}$$

$$\text{Т.к. } e^{ix} = \cos x + i\sin x \Rightarrow \begin{matrix} e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \\ e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x - i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \end{matrix} \Rightarrow \text{Решения :}$$

$$\boxed{y_1(x)=\frac{1}{2}(e^{\lambda_1 x}+e^{\lambda_2 x})=e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x}\qquad \boxed{y_2(x)=\frac{1}{2i}(e^{\lambda_1 x}-e^{\lambda_2 x})=e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x}$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x-\beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix}=$$

$$=e^{\alpha x}\begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x \end{vmatrix}=\beta_1 e^{\alpha x}\neq 0$$

Общее решение: $\boxed{y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)}$

<u>В общем виде:</u>

$L(y)=y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ldots+a_n y=0$ Решение надо искать в виде $y=e^{\lambda x}$:

$y^{(k)}=\lambda^k e^{\lambda x}$:

$$\lambda^n e^{\lambda x}+a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+\ldots+a_n e^{\lambda x}=e^{\lambda x}\underbrace{(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n)}_{L^*(\lambda)}=0\Rightarrow L^*(\lambda)\cdot e^{\lambda x}=0.$$

$$L^*(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\overbrace{m_1}^{\text{кратность корня}}}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_g)^{m_g}$$

$\lambda_k=\alpha_k+\beta_k i,\quad$ а также $\quad\lambda_t=\alpha_k-\beta_k i.$

<u>Утверждение</u>: Если следующие m функций (решения уравнения L(x))

$y_1=e^{\lambda_1 x};\ y_2=xe^{\lambda_1 x};\ \ldots\ ;y_3=x^{m-1}e^{\lambda_1 x}$ – линейно независимы

$$C_1 e^{\lambda_1 x}+C_2 x e^{\lambda_1 x}+\ldots+C_{m_1}x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}\underset{\substack{\text{не может}\\ \text{выполняться}\\ \text{для}\forall x}}{\equiv}0\qquad\Rightarrow y_1=e^{\lambda_1 x}$$

$C_1+C_2x+\ldots+C_{m_1}x^{m_1-1}=0$ – не может быть $>m_1-1$ решений

$$L^*(\lambda)e^{\lambda_1 x}=(\lambda-\lambda_1)^m g(\lambda)$$

$$\left(L^*(\lambda)\right)'=m_1(\lambda-\lambda_1)^{m_1-1}g(\lambda)+(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdot g'(\lambda)$$

$$\begin{cases} L^*(\lambda_1) = 0 \\ \left(L^*(\lambda_1)\right)' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \left(L^*(\lambda_1)\right)^{(m_1-1)} = 0 \end{cases};$$

$L(xe^{\lambda x}) = xL^*(\lambda)e^{\lambda x} + e^{\lambda x}\left(L^*(\lambda)\right)' \Rightarrow \dfrac{d^k}{dx^k}(xe^{\lambda x}) = x\lambda^k e^{\lambda x} + k\lambda^{k-1}e^{\lambda x}$ (по формуле Лейбница).

$$L(x^k e^{\lambda x}) = x^k \underbrace{L^*(\lambda)}_{=0} e^{\lambda x} + x^{k-1}\underbrace{\left(L^*(\lambda)\right)'}_{=0} e^{\lambda x} + \ldots + \underbrace{\left(L^*(\lambda)\right)^{(k)}}_{=0} e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x^k e^{\lambda x} - \\ \text{решение уравнения} \end{matrix}.$$

$0 \le k \le m_1 - 1$

Общее решение – многочлен k-й степени от аргумента в зависимости от вида частного решения:

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \\ y_2(x) = xe^{\lambda_1 x} \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{m_1} = x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x} \end{cases}$$

Аналогично находятся фундаментальные решения для остальных корней $\lambda_1 \ldots \lambda_g$.