Лекция 12

Метод неопределенных коэффициентов для нахождения частного решения неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Представим неоднородное уравнение в виде:

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, (1)

где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены, причем $\max(\deg P(x), \deg Q(x)) = m$.

Частное решение уравнения (1) можно искать в виде:

$y_0 = \left(R(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + S(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right)x^k$, где $R(x)$ и $S(x)$ – многочлены степени m, k –кратность корня $\lambda = \alpha + i\beta$ характеристического уравнения $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ (k принимается равным 0, если $\lambda = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения).

Пример. $y'' - 3y' + 2y = x$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ $\quad\quad$ $\lambda_1 = 1,$ $\lambda_2 = 2$

В данном случае $\alpha = 0, \beta = 0$ и частное решение ищется в виде:

$y_0 = ax + b$; $\quad\quad$ $y_0' = a, y_0'' = 0$

Подставляем выражения для y_0, y_0' и y_0'' в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} &2\cdot(ax+b) - 3a = x; \\ &2ax + 2b - 3a = x; \end{aligned} \qquad a = \frac{1}{2}; \qquad b = \frac{3}{4}$$

Решение исходного уравнения:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases},$$ где $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$; $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ $\quad\quad$ a, b, c, d - произвольные постоянные

Решение представляет собой систему $\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2) \\ y = y(t, C_1, C_2) \end{cases}$, которая задает линейное векторное пространство $\mathbf{R}^2$.

Решение системы можно представить также в виде

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, если $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$ - решения независимы.

Исходную систему запишем в виде:

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, где A – матрица из коэффициентов $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ системы.

Введем невырожденную матрицу B замены $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = A \cdot B \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, где $\qquad$ $A_1 = B^{-1} A B$

Матрица A_1 запишется в виде $A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, где λ_1, λ_2 - собственные значения характеристического многочлена матрицы A (собственные числа):

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \\ \dot{y}_1 =_1 \lambda_2 y_1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_1 = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ - собственные векторы матрицы A.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathrm{R})$$

Пример.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Собственные числа матрицы A:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нетрудно найти, что $\alpha_1 = 1,$ $\alpha_2 = -1$

$\lambda_2 = 5$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \beta_1 = 1, \ \beta_2 = 3$$

Общее решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \\ y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \end{cases}$$

Пример 2. Рассмотрим случай, когда корни характеристического многочлена совпадают.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases} (1) \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 3,$ матрица $A - \lambda_1 E$ примет вид $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$, другое решение нужно искать в виде:

$$\begin{cases} x_2 = (a + bt)e^{3t} \\ y_2 = (c + dt)e^{3t} \end{cases}$$

(1’) , где a,b,c,d – неопределенные коэффициенты.

Найдем их, продифференцировав уравнения системы (1’) и подставив выражения для $\dot{x}, \dot{y}$ в уравнение (1)

$$\dot{x}_2 = (b + 3(a + bt))e^{3t} \qquad \begin{cases} (b + 3(a + bt))e^{3t} = (2(a + bt) + c + dt)e^{3t} \\ (d + 3(c + dt))e^{3t} = (-(a + bt) + 4(c + dt))e^{3t} \end{cases}$$

$$\dot{y}_2 = (d + 3(c + dt))e^{3t}$$

Разделив на e^{3t} оба уравнения, получим систему, связывающую неизвестные коэффициенты:

$$\begin{cases} 3b = 2b + d \\ 3a + b = 2a + c \\ 3d = -b + 4d \\ 3c + d = -a + 4c \end{cases}$$, отсюда $b = d, b = c - a$ (система вырожденная).

Положим $b = d = 1, c = 1, a = 0$.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Проверим систему на линейную зависимость.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = e^{6t} \begin{vmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{vmatrix} = e^{6t} \neq 0$$

Таким образом, общий вид решения:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix} e^{3t}}$$

В случае кратных корней одно решение находится сразу, второе – методом неопределенных коэффициентов.

<u>Пример 3.</u> Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, имеющих комплексно-сопряженные корни.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 2 \pm i$$

$$\lambda = 2 - i$$

$$\begin{pmatrix} i-1 & 1 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t-it} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}(\cos t - i\sin t) \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = e^{2t}(\cos t - \sin t) - ie^{2t}(\cos t + \sin t)$$

$$y = e^{2t}(\cos t - i\sin t)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Рассмотрим еще один пример, который иллюстрирует решение системы трех линейных дифференциальных уравнений.

Даны две последовательные химические реакции $A \to B$ и $B \to C$. Скорость каждой из реакций пропорциональна концентрации реагирующего вещества. Константы скорости реакций равны a и b.

Обозначим x,y,z концентрации веществ A,B и C соответственно.

Система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax \\ \dot{y} = ax - by \\ \dot{z} = by \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -b & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} -a-\lambda & 0 & 0 \\ a & -b-\lambda & 0 \\ 0 & b & -\lambda \end{pmatrix} = (-a-\lambda)(-b-\lambda)(-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -b & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \text{ собственный вектор } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = -a \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & -b+a & 0 \\ 0 & b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \qquad \text{собственный вектор } \begin{pmatrix} b-a \\ a \\ -b \end{pmatrix} \text{ находится из}$$

системы $\begin{cases} a\alpha + (a-b)\beta = 0 \\ b\beta + a\gamma = 0 \end{cases}$.

$$\lambda_3 = -b \qquad \begin{pmatrix} -a+b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \qquad \text{собственный вектор } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-at} \begin{pmatrix} b-a \\ a \\ -b \end{pmatrix} + C_3 e^{-bt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = C_2(b-a)e^{-at} \\ y = C_2 a e^{-at} + C_3 e^{-bt} \\ z = C_1 - C_2 b e^{-at} - C_3 e^{-bt} \end{cases}$$

Константы C_1, C_2 и C_3 определяются из начальных концентраций веществ A,B и C.

Лекции набирали Кузнецова Анна.

Васильев Александр.

Литвинов Юрий.

Селюнин Александр.