Лекция N 1

Кратные интегралы

Двойные интегралы

Опр: множество $K \subset R^n$ называется компактом, если K- ограничено и замкнуто, т.е. лежит в ограниченном объеме и содержит все свои предельные точки.

Пример: отрезок, квадрат вместе с границей, окружность и эллипс вместе с границами.

Опр: множество $D \subset R^n$ называется связным, если *не выполняется* следующее свойство:
$\exists$ D_1, D_2 – открытые непустые множества: $D_1 \cap D \neq \varnothing$, : $D_2 \cap D \neq \varnothing$, $D \subset D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$

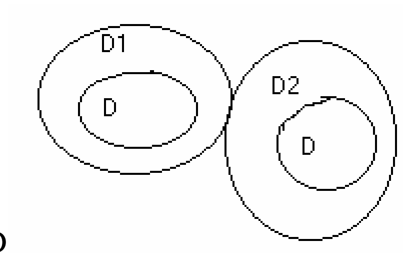


рис.1 несвязное множество D

Пример связного множества: связный компакт на прямой– отрезок, связные компакты на плоскости– квадрат и круг с границами.

Свойства компактов K_1 и K_2:

1. $K_1 \cup K_2$ также является компактом.
2. $K_1 \cap K_2$ –компакт

Площадь компакта К

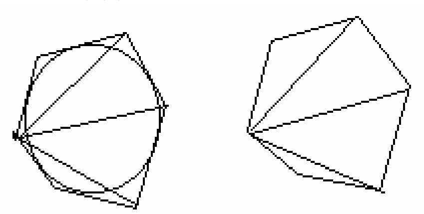


рис.2

Пусть $K \subset P_n$, где P_n–многоугольник; либо совокупность многоугольников, если К состоит из нескольких несвязных частей. Площадь многоугольника P_n можно найти сложением площадей составляющих его треугольников (рис. 2): $S_n = \sum S_\Delta$.

Определение: площадью S(K) компакта K называется : $\mathbf{S(K)=inf\,S(P_n)}$.

Эта нижняя граница всегда существует, т.к. площадь– величина неотрицательная и ограничена снизу нулем.

Свойства S(K):

1. $S(K) \geq 0$
2. $S(K_1 \cap K_2)=0 \Rightarrow S(K_1 \cup K_2)= S(K_1) + S(K_2)$

Примеры:

График непрерывной функции $y = f(x) \in C[a,b]$:

1. $K = \{(x,y): x \in [a,b] ; y = f(x)\}$; докажем, что $S(K) = 0$.

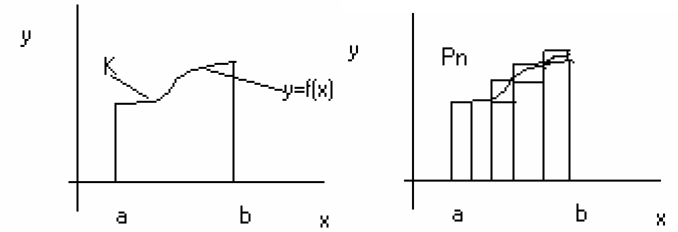


рис.3

Делим отрезок [a,b] на n равных частей, пусть $m_i = \min\limits_{\Delta i} f(x)$;

$$M_i = \max_{\Delta i} f(x); \qquad |\Delta i| = \frac{b-a}{n}$$

f(x) равномерно непрерывна на [a,b] (теорема Кантора)$\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \forall n \geq n_0$: $M_i - m_i < \varepsilon$.

Рассмотрим $K \subset P_n$:

$$S(P_n) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)|i| < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \cdot \Delta i = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta i = \varepsilon(b-a) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

Следовательно, S(K)=0.

2. $f(x) \in C[a,b]$; $f(x)>0$; $K=\{(x,y): x \in [a,b];0 \leq y \leq f(x)\}$; Площадь под кривой $y = f(x)$, $x \in [a,b]$.

   Докажем, что $S(K) = \int_a^b f(x)dx$

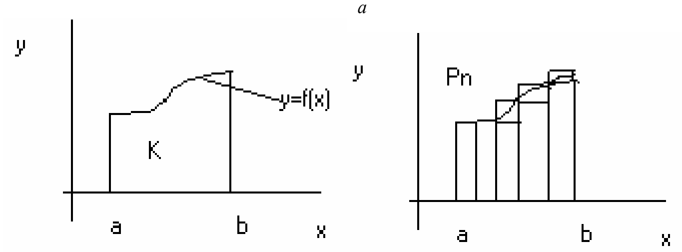
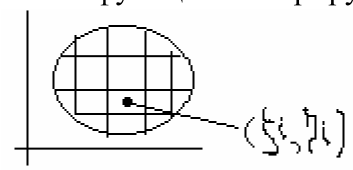


рис.4

$$M_i = \max_{\Delta i} f(x)$$

$S(P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i |i| \ \to \int_a^b f(x)dx$ (интеграл существует, т.к. всякая непрерывная функция интегрируема).



на рис.5 изображен компакт К.

Дадим определение $\iint_K f(x,y)dxdy$:

Зададим разбиение Т компакта К:

Т –разбиение компакта К: $\{K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$; K_i: $S(K_i \cap K_j) = 0$, $i \neq j\}$

Выбираем некоторую точку $P(\varepsilon_i, \eta_i)$, принадлежащую компакту K_i , $i = 1,...,n$ и зададим интегральную сумму

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i, \eta_i) S(K_i),$$

Обозначим: $d(K_i) = \max(\|(x',y'),(x'',y'')\|, (x',y') \in K_i; (x'',y'') \in K_i)$,

где $\|(x',y'),(x'',y'')\| = \sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2}$ -расстояние и диаметр разбиения: $d(T) = \max_i di$.

Определение: Двойным интегралом от ограниченной функции f(x,y) по компакту К называется:

$$\iint_K f(x,y)dxdy = \lim_{d(T)\to 0} S(T), \text{ если такой предел существует.}$$

Если такого предела не существует то функция неинтегрируема (например, функция Дирихле, D(x,y), которая в рациональных точках принимает значение 1, а в иррациональных точках значение ноль).

Свойства двойного интеграла (1-5)

1. $\iint_K f(x,y)dxdy$ = S(K), если f(x,y) $\equiv 1$

2. S(K) = 0 $\Rightarrow \iint_K f(x,y)dxdy$ =0, где f- любая ограниченная функция

3. $\iint_K (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y))dxdy = \lambda \iint_K f(x,y)dxdy + \mu \iint_K g(x,y)dxdy$

4. S($K_1 \cap K_2$)=0 $\Rightarrow \iint_{K_1 \cup K_2} f(x,y)dxdy = \iint_{K_1} f(x,y)dxdy + \iint_{K_2} f(x,y)dxdy$

5. m $\le$ f(x,y) $\le$ M $\Rightarrow$ mS(K) $\le \iint_K f(x,y)dxdy \le$ M S(K)

6. Если K- связный компакт и f(x,y) $\in$ C(K), то
$\exists(\xi_0,\eta_0) \in K : f(\xi_0,\eta_0)\cdot S(K) = \iint_K f(x,y)dxdy$

доказательство свойств 1-5:

1. $\iint_K f(x,y)dxdy = \lim\limits_{d(T)\to 0} S(T)$

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} S(K_i) = S(K) \Rightarrow \iint_K f(x,y)dxdy = S(K)$$

2. S(K)=0, следовательно, для любого разбиения T: S(K_i)=0, $i = 1,2,...n$

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)S(K_i) = 0 \Rightarrow \iint_K f(x,y)dxdy = \lim_{d(T)\to 0} S(T) = 0$$

3. $S(T) = \sum_{i=1}^{n}[\lambda f(\xi_i,\eta_i)S(K_i) + \mu g(\xi_i,\eta_i)S(K_i)] = \lambda S(T,f) + \mu S(T,g)$
$\to \lambda \iint_K f(x,y)dxdy + \mu \iint_K g(x,y)dxdy$.

4. $S(T) = \sum_{K_i \in K_2}^{n} f(\xi_i,\eta_i)S(K_i) + \sum_{K_j \in K_2}^{n} f(\xi_i,\eta_i)S(K_j) + \sum_{K_t \subset K_1 \cap K_2}^{n} f(\xi_{it},\eta_{tt})S(K_t) \to$
$\iint_{K_1} f(x,y)dxdy + \iint_{K_2} f(x,y)dxdy$

5. m $\le$ f(x,y) $\le$ M

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)S(K_i)$$

$$mS(K) = m\sum S(K_i) \le S(T) \le M\sum S(K_i) = MS(K)$$

$$mS(K) \le \iint_K f(x,y)dxdy \le MS(K)$$

6. $m \le \frac{\iint_K f dxdy}{S(K)} \le M$, где функция f определена на связном компакте и принимает все значения между M и m.

$$\Rightarrow \exists(\xi_0,\eta_0)\in K \Rightarrow f(\xi_0,\eta_0)=\frac{\iint\limits_K f dxdy}{S(K)}$$

<u>Геометрический смысл двойного интеграла функции f(x,y) на компакте K: (f(x,y)>0)</u>

V=$\iint\limits_K f(x,y)dxdy$ – объем цилиндроида, изображенного на рис.6

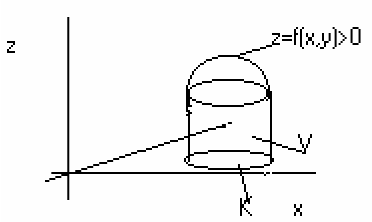


рис.6

Теорема без (док-ва): Если f(x,y)-непрерывна на K, то существует $\iint\limits_K f(x,y)dxdy$.

Теорема: Если K = $K_1 \cup K_2$ и $S(K_2)=0$, то можно отбросить K_2, т.к. $S(K_2)=0$

$\Rightarrow \iint\limits_K f(x,y)dxdy = \iint\limits_{K_1} f(x,y)dxdy$