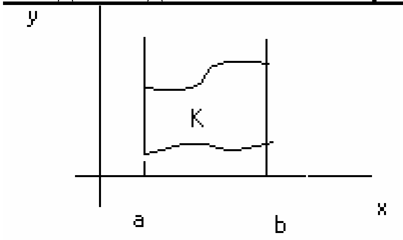
Лекция N 2

Сведение двойного интеграла к повторному



K=$\{(x,y): x \in [a,b], y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\ \}$

Если $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C[a,b]$; f(x,y)$\in$C(K), то:

$$\iint\limits_K f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Доказательство:

Рассмотрим частный случай области интегрирования– прямоугольник D (изображен на рис.7 и разбит на прямоугольники K_{ij}).

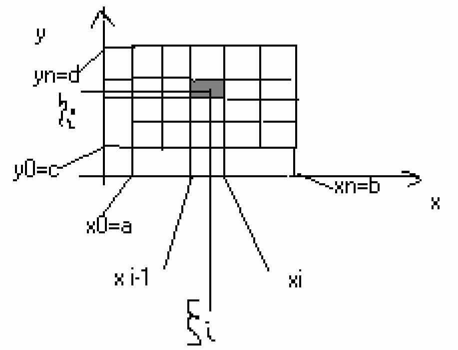


рис.7

Интегрирование функции f по ординате осуществляется при постоянном x:

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

Покажем, что $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b F(x)dx$.

Разобьем стороны большого прямоугольника D на мелкие отрезки:

$\Delta i = [x_{i-1}, x_i], i = 1,2,...n$ $\qquad \delta j = [y_{j-1}, y_j], j = 1,...n$

Тогда, тогда прямоугольник D разобьется на маленькие прямоугольники K_{ij}=$\{(x,y): x \in \Delta i, y \in \delta j\}$

S(K_{ij}) = $\dfrac{(b-a)(d-c)}{nm} \to 0$, при измельчении разбиения сторон (m, n$\to +\infty$).

$|\Delta i| = \dfrac{b-a}{n} \qquad |\delta j| = \dfrac{d-c}{m}$

S (T)=

$$\sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j) S(K_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)|\Delta i||\delta j| = \sum_{i=1}^{n} \Delta i (\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_i)|\delta j|) \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta i (\int\limits_c^d f(\xi_i, y)dy)$$

Фиксируем ξ_i: S(T)=$\sum F(\xi_i)|\Delta i| \to \int\limits_a^b F(x)dx$.

Из непрерывности функций (по условию) следует:

m$\le$f(x,y) $\le$M

c$\le \varphi_1(x) < \varphi_2(x) \le$d

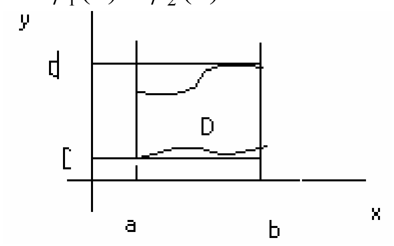


рис.8

Введем новую функцию $f_1(x,y)$

$$f_1(x,y) = \begin{cases} f(x,y), (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}$$, где D–

прямоугольник: $\{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d \}$

$$\iint_K f(x,y)dxdy = \iint_D f_1(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f_1(x,y)dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Рассмотрим другой случай криволинейной трапеции:

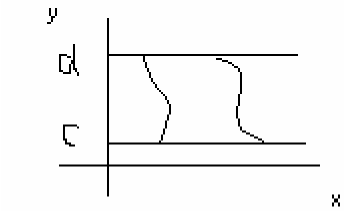
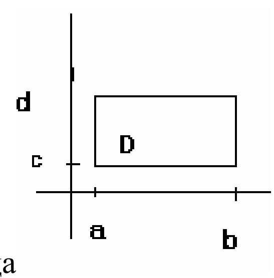


рис.9

Значение интеграла не меняется при вычислении в другом порядке.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx .$$

Следствие: пусть область интегрирования D – прямоугольник, а функция f(x,y)



представима в виде f(x,y)=h(x) g(y) , тогда

$$\iint_D h(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b h(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

Доказательство:

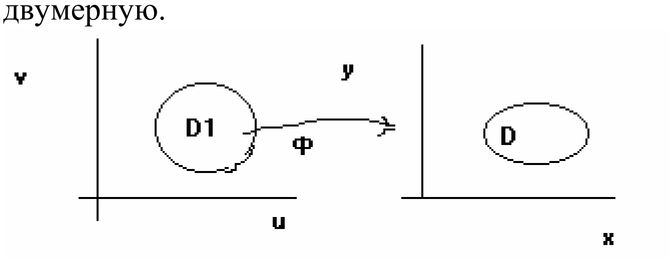
$$\int_a^b dx \int_c^d h(x)g(y)dy = \int_a^b h(x)dx \int_c^d g(y)dy = \left(\int_a^b h(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

Где h(x) выносим как константу в первом интеграле. Если область интегрирования D другая, то разбиваем ее на криволинейные трапеции и складываем в силу аддитивности интеграла.

Вычисление двойных интегралов

<u>Замена переменных</u>

При замене переменных в двойном интеграле фактически происходит некоторое отображение Ф одной двумерной области интегрирования D_1 в другую D, также двумерную.



$x = \varphi(t)$

При однократном интеграле на функцию φ накладывают условие монотонности и непрерывной дифференцируемости, чтобы замена $x = \varphi(t)$ была однозначной, и чтобы было легко переходить от одной области к другой (обратимый переход). Аналогично для двойного интеграла при отображении Ф двумерной области D_1 в двумерную D:

$$\Phi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \qquad D_1 \xrightarrow{\Phi} D$$

также потребуем взаимооднозначности отображения Ф.

Если якобиан отображения:

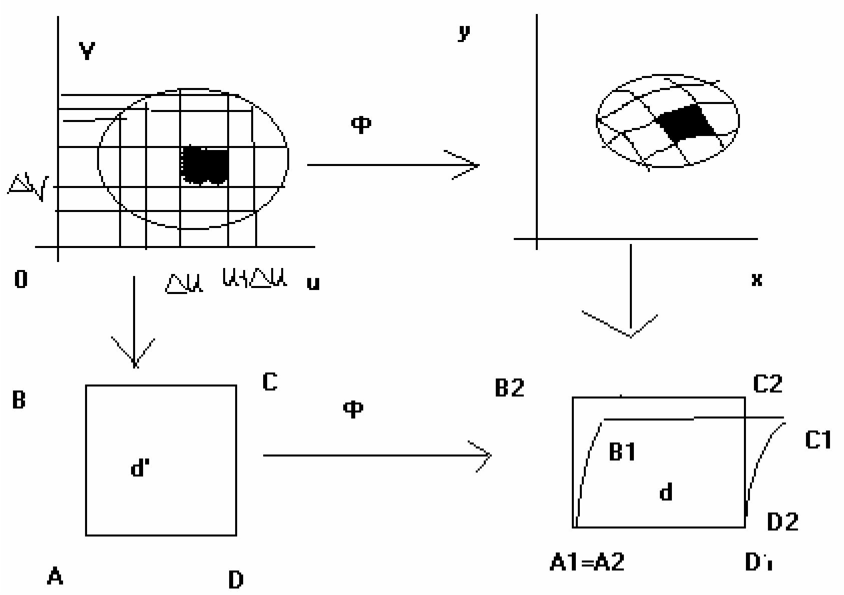
$I(u,v) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$, тогда отображение Ф будет взаимооднозначным.

Если x(u,v) и y(u,v) непрерывно дифференцируемы, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x(u,v), y(u,v))\left|I(u,v)\right|dudv$$

Дополнительный множитель $\left|I(u,v)\right|$ появляется при переходе от двух переменных x, y к другим двум переменным u, v; и он служит коэффициентом преобразования площади.

Доказательство: рассмотрим отображение Ф:



A_1–(x(u,v),y(u,v))
B_1 –(x(u,v+Δv),y(u,v+Δv))
D_1–(x(u+Δu,v),y(u+Δu,v))
C_1–(x(u+Δu,v+Δv),y(u+Δu,v+Δv))
По формуле Тейлора с точностью до первого порядка малости:

x(u+Δu,v) $\approx x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u$ x(u,v+Δv) $\approx x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v$

y(u+Δu,v) $\approx y(u,v)+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u$ y(u,v+Δv) $\approx y(u,v)+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v$

x(u+Δu,v+Δv) $\approx x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v$

y(u+Δu,v+Δv) $\approx y(u,v)+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v$

$A_2 = A_1$

$B_2 = (x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v\,,\ y(u,v)+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v)$

$C_2 = (x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v\,,\ y(u,v)+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v)$

$D_2 = (x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u\,,\ y(u,v)+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u)$, где $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$–параллелограмм.

Найдем площади элементов разбиения областей D\` и D:
$S_{ABCD}=\Delta u\Delta v$ (в координатах u, v)

$S(A_1,B_1,C_1,D_1) \approx S(A_2,B_2,C_2,D_2) = \det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\end{pmatrix} = I(u,v)\ \Delta u\Delta v$ (в координатах x, y)

$\overrightarrow{A_2B_2} = (\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v, \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v)$

$\overrightarrow{A_2D_2} = (\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u)$

Если рассмотреть небольшой участок площади (прямоугольник ABCD), тогда $S_{ABCD}=\Delta u \Delta v$

$S(A_1B_1C_1D_1) \approx |I(u,v)| \; \Delta u \Delta v$, где $|I(u,v)|$ коэффициент преобразования площади (якобиан), т.к. при преобразовании координат изменяется площадь.

Отсюда следует формула замены переменных:

$S(d_i) \approx \sum_i f(x(u_i,v_i), y(u_i,v_i))S(d_i')$, где d_i, d_i'–элементы соответствующих разбиений.

$$\sum_i f(x(u_i,v_i), y(u_i,v_i)) = |I(u_i,v_i)|\Delta u_i \Delta v_i$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x(u,v), y(u,v))|I(u,v)|dudv$$

Если I(u,v)=0 на некоторых точках или на множествах с нулевой площадью, то интеграл от этого не меняется.

<u>Пример:</u> (в полярных координатах)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad I(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

r всегда больше нуля, кроме начала координат, где якобиан замены равен нулю. Нельзя интегрировать по областям, содержащим начало координат, но если таких точек конечное множество, либо они образуют нулевую площадь, то интегрировать можно, так как интеграл не меняется.

Площадь круга

$$S = \iint_{x^2+y^2\le R^2} dxdy = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^R rdr\right) = \pi R^2$$

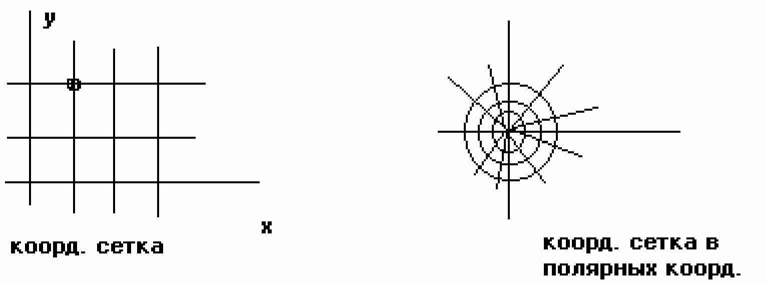
При линейной замене якобиан замены легко считается и равен константе:

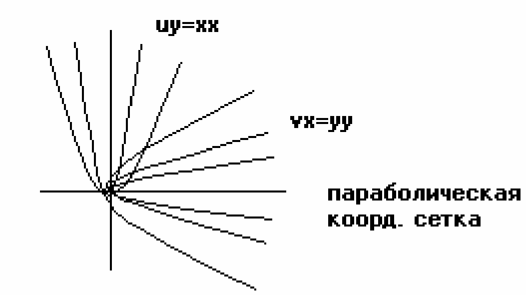
$$\begin{matrix} x = a_1u + b_1v \\ y = a_2u + b_2v \end{matrix} \Rightarrow I = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = const$$

Но в параболических заменах якобиан также константа:

$$\begin{cases} uv = x^2 \\ vx = y^2 \end{cases}$$

Площадь в три раза меньше в параболических координатах, чем в декартовых.




uy=xx
vx=yy
параболическая
коорд. сетка