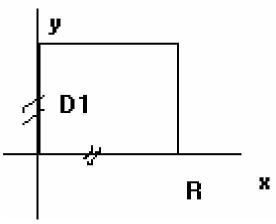
Лекция 3
Интеграл Пуассона (интеграл вероятности)

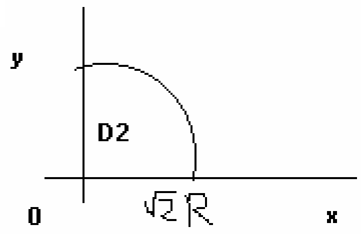
$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

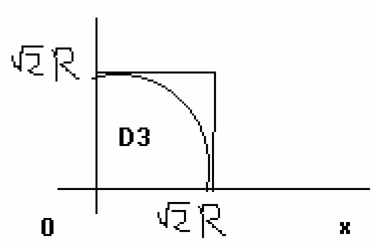
Вычислим с помощью двойного интеграла.

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \lim_{R\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \text{ (по определению)}$$

$$I = \int_0^{R} e^{-x^2}\,dx,\ I = \lim_{R\to+\infty} I(R),\ I^2 = \lim_{R\to+\infty} I^2(R)$$







$$(I(R))^2 = \int_0^R e^{-x^2}\,dx \int_0^R e^{-y^2}\,dy = \iint_{D_1} e^{-x^2} e^{-y^2}\,dxdy = A(R)$$, где D_1–квадрат, $D_1 \subset D_2$

$$D_2 : \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2R^2, x \ge 0, y \ge 0\}$$

$$e^{-x^2-y}\ dxdy > 0 \Rightarrow \iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,dxdy < \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \text{B(R)}$$

$D_1 \subset D_2 \subset D_3$

C(R)= $\iint_{D_3} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$

A(R)<B(R)<C(R)

$$\text{B(R)}= \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 2R^2\\ x\ge 0\\ y\ge 0}} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \left|\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le R \end{array}\right. = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\right)\left(\int_0^R r e^{-r^2}\,dr\right) = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\Bigg|_0^R\right) = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right)$$

$$\text{A(R)} \le \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right) \to \frac{\pi}{4}(R \to +\infty) \le C(R)$$

A(R) и C(R) имеют один предел при R$\to\infty$, т.к. $C(R) = A(\sqrt{2}R)$. Следовательно,

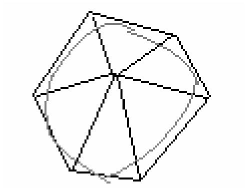
$$\exists \lim_{R\to\infty}(A(R)) = \lim_{R\to\infty}(C(R)) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Тройные интегралы

Интегрирование на компакте K

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz$$

Определение объема компакта:

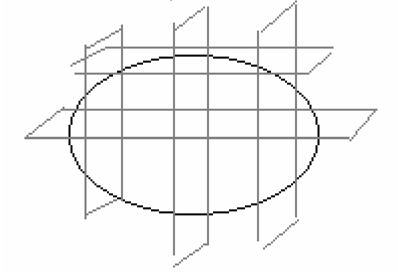


Разобьем многогранник P_n , содержащий K, на пирамиды. Суммируя объемы пирамид, найдем объем этого многогранника. Тогда объем заключенного компакта

$V(K) = \inf V(P_n), K \subset P_n$ V(K) ≥ 0

свойство: если $V(K_1 \cap K_2)=0$, тогда $V(K_1 \cup K_2)= V(K_1) + V(K_2)$

Следовательно, возможно только такое разбиение компакта, при котором объем границ нулевой (по аналогии с двойным интегралом). В этом случае разбиение трехмерного компакта осуществляется поверхностями с нулевым объемом (например, плоскостями):



T– разбиение компакта: $K = K_1 \cup K_2 \cup ... K_n$ для $\forall i, j : V(K_i \cap K_j) = 0$.

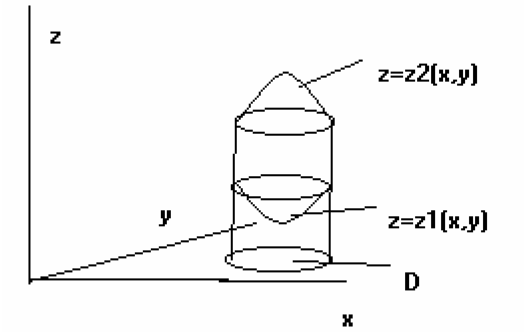
dT–диаметр разбиения: $(x_i, y_i, z_i) \in K_i, i = 1,...,n$)

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) V(K_i)$$

$$\iiint_K f(x, y, z) dxdydz = \lim_{d(T)\to 0} (S(T))$$

Все свойства для двойных интегралов справедливы для тройных интегралов (доказательства аналогичные). Физический смысл тройного интеграла заключается в том, что если *плотность вещества* задана функцией f, то *масса вещества* в определенном объеме– это тройной интеграл функции f по этому объему.

Вычисление тройных интегралов



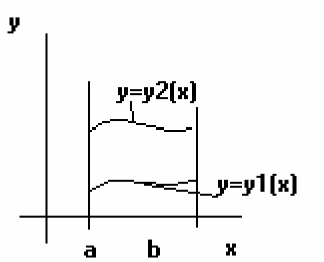
K– компакт-цилиндроид

$$\iiint_K f(x, y, z) dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz$$

Если область интегрирования K– прямоугольный параллелепипед, а функция представима в виде произведения: $f(x,y,z)=f_1(x)f_2(y)f_3(z)$, тогда

$$K = \begin{cases} (x, y, z) : a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \\ e \leq z \leq g \end{cases}$$

$$\iiint\limits_K f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b f_1(x)dx \int\limits_c^d f_2(y)dy \int\limits_e^g f_3(z)dz$$



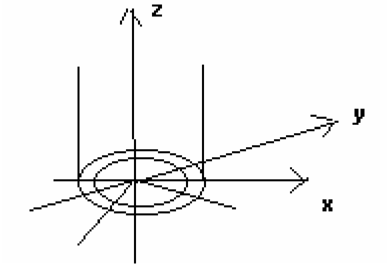
Замена переменных

Аналогично двукратному интегралу, отображение должно быть взаимооднозначным и, следовательно, якобиан

$$I(u,v) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\iiint\limits_K f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{K'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\left|I\right|dudvdw$$

<u>Пример 1:</u> (цилиндрические координаты)



$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad (x,y,z) \to (r,\varphi,z)$$

I(r,φ,z)=r

<u>Пример 2</u>: (сферические координаты)

$r \geq 0$

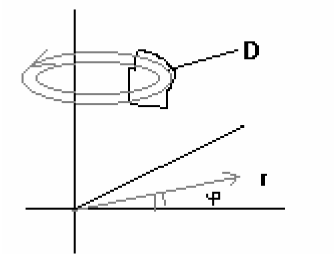
$0 \leq \Theta \leq 2\pi$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

Формулы связи: $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\Theta \\ y = r\sin\varphi\sin\Theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ I=$r^2\sin\varphi$ (якобиан замены)

V$_{\text{шара}}$= $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq R^2} dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\Theta \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} r^2\sin\varphi dr = \int\limits_0^{2\pi} d\Theta \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{R} r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3$

<u>Пример 3:</u>



Плоская область D$\in$XOZ, вращаем ее вокруг оси Oz в цилиндрических координатах.

Объем тела вращения:

V= $\int_0^{2\pi} d\varphi \iint_D rdzdr = 2\pi \iint_D rdrdz$

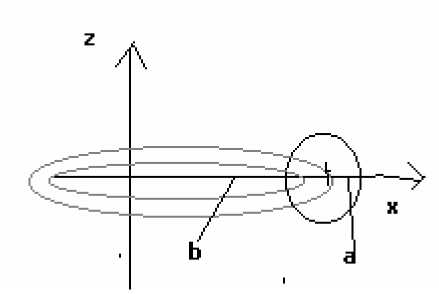
M_z= $\iint_D rdrdz$ (статический момент инерции области B относительно оси Oz)

M_z=S(D)r_c, где r_c – расстояние от центра тяжести D (плотность области D равна 1).

V= $2\pi r_c S(D)$

Таким образом, объем тела вращения области D вокруг неподвижной оси z равен произведению S(D) на длину окружности, описанной центром тяжести области D.

Пример 4: (тор)



b>a $V_{тора}$= $2\pi b \pi a^2 = 2\pi^2 a^2 b$, где r_c=b.