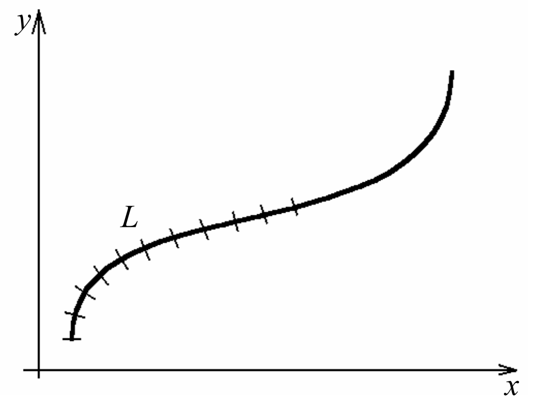
Лекция 4

Криволинейные интегралы.

Выделяют два типа интегралов: первого и второго рода.
Рассмотрим криволинейный интеграл первого рода.
Пусть требуется найти длину кривой на плоскости, определенной уравнением $y=y(x)$.
Как было доказано во втором семестре:



$|L|=\int dl$

так как $y = y(x)$, то

$$dl = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

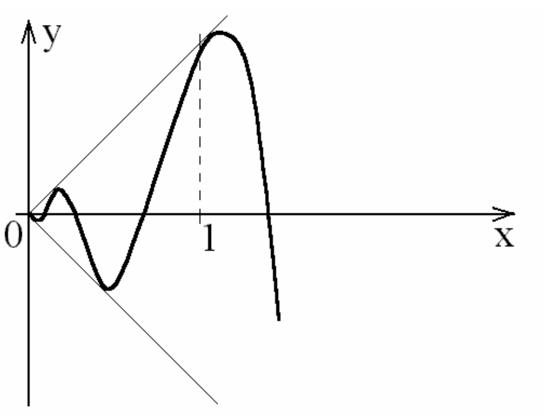
$$\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases},$$

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

Кривая $y=y(x)$ имеет конечную длину, если $y(x) \in C[a,b]$

Пример непрерывной кривой, не имеющей конечной длины:

$$y = \begin{cases} 0, x = 0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \end{cases} \quad ,\text{где} \quad x \in [0,1]$$



Кривая является синусоидой, заключенной между двумя прямыми $y = x$ и $y = -x$.
Для функции $x\sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0$ условие непрерывности $y'(x)$ в точке $x=0$ нарушается. Кривая, заданная уравнением: $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ не имеет конечной длины (доказать самостоятельно)

<u>Опр.</u> По определению, криволинейным интегралом первого (I-го) рода на плоскости называется:

$$\int\limits_L f dl = \int\limits_b^a f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \quad ,\text{где L – кривая, заданная уравнениями} \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}.$$

Докажем корректность определения:

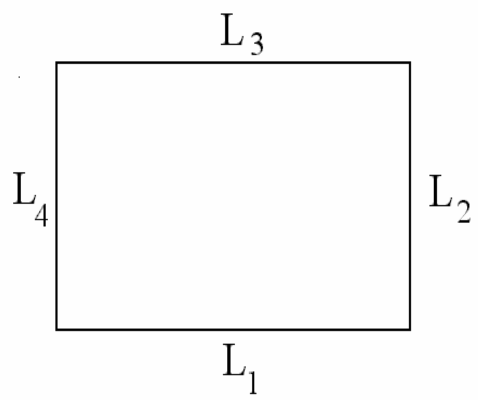
Сделаем замену: $\begin{matrix} t = t(u) \\ t'(u) \in c[a,b] \end{matrix}$,где $\alpha \le u \le \beta$ и $\begin{matrix} t(\alpha) = a \\ t(\beta) = b \end{matrix}$

$$\begin{matrix} (x(t(u)))'_u = x'_t \cdot t'_u \\ (y(t(u)))'_u = y'_t \cdot t'_u \end{matrix} \quad ,\text{где} \quad t'_u > 0 \quad \text{и} \quad dt = t'_u \cdot du\,,$$

тогда $x_u^/ = x_t^/ \cdot t_u^/ \Rightarrow x_t^/ = \dfrac{x_u^/}{t_u^/}$,аналогично и $y_t^/ = \dfrac{y_u^/}{t_u^/}$

$$\int_L fdl = \int_a^b f(x(t(u)), y(t(u))) \cdot \sqrt{\left(\frac{x_u^/}{t_u^/}\right)^2 + \left(\frac{y_u^/}{t_u^/}\right)^2}\, t_u^/ du = \int_\alpha^\beta f(x(t(u)), y(t(u))) \cdot \sqrt{(x_u^/)^2 + (y_u^/)^2}\, du \, ,$$

Как видно из полученного выражения, определение не зависит от выбора параметра.



Опр. Кривая $(K) = (AB)$, заданная параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ называется гладкой, если функции φ и ψ имеют непрерывные производные, не обращающиеся одновременно в нуль.

Опр. Кусочнонепрерывной (кусочногладкой) кривой называется кривая, которая является непрерывной и состоит из нескольких гладких кривых.

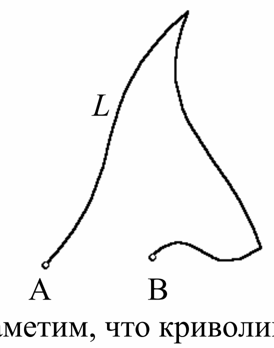
Свойства кусочнонепрерывной кривой (без доказательства):

$1^0 \int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{L_4}$

$2^0 \int_L (c_1 f + c_2 g) dl = c_1 \int_L f_1 dl + c_2 \int_L f_2 dl$ (свойство аддитивности)

Аналогично кривая $L \subset \Re^3$ задается системой:

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ это уравнение кусочнонеперывной кривой



Кривую L будем называть кривой по пути АВ, т.е. начало кривой в точке А и конец в точке В.

Заметим, что криволинейный интеграл первого рода не завистит от того, в каком направлении мы интегрируем по прямой от $A \to B$,или от $B \to A$.

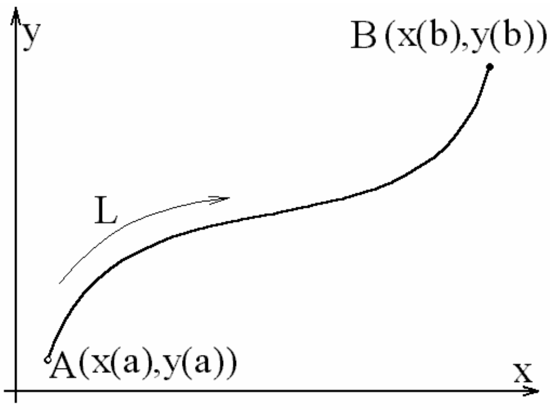
Опр. Интеграл $\int_L f(x,y,z) dL = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$ называется криволинейным интегралом первого рода по кривой в пространстве $\Re^3$.

Криволинейные интегралы второго типа.

Для начала, как и в случае криволинейных интегралов первого рода, интеграл второго рода будем рассматривать на плоскости (в $\Re^2$).

Криволинейным интегралом второго рода называется $\int\limits_{L_+} \vec{F} d\vec{r} : \int\limits_a^b (Px' + Qy')dt$,

где $\overline{F} = (P, Q)$ и $L_+ = AB$, $d\vec{r} = (dx, dy)$.



Точки A и B имеют координаты $A(x(a),y(a))$ и $B(x(b),y(b))$ соответственно.
L_+ означает, что выбрано положительное направление движения по кривой, т.е. то направление, при котором интеграл от A до B имеет положительное значение.
Обозначим $\vec{r} = (x, y)$ - радиус вектор и

$$L_+ : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Работа по перемещению тела из точки A в точку B в поле $\vec{F}$ выражается интегралом:

$$A = \int\limits_{L_+} \vec{F} d\vec{r}$$

в этом и есть физический смысл интеграла.
Докажем корректность определения:
Делаем замену $t=t(u)$ и $\begin{cases} t(\alpha) = a \\ t(\beta) = b \end{cases}$,

$x_t^{/} = \dfrac{x_u^{/}}{t_u^{/}}, y_t^{/} = \dfrac{y_u^{/}}{t_u^{/}}$ и P зависит от x,y, которые, соответственно, зависят от u, а значит интеграл можно представить в виде:

$$\int\limits_{L_+} \vec{F} d\vec{r} = \int\limits_\alpha^\beta \left(P \frac{x_u^{/}}{t_u^{/}} + Q \frac{y_u^{/}}{t_u^{/}} \right) t_u^{/} du = \int\limits_\alpha^\beta \left(Px_u^{/} + Qy_u^{/} \right) du$$

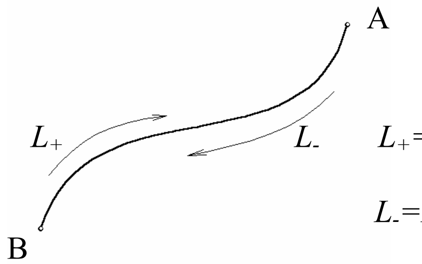
т.е. интеграл не зависит от выбора параметризации.

Свойства:

1^0 Является линейным по функции и аддитивным по множеству, т.е.

$$\int\limits_{L_+} (\vec{F} + \vec{G}) d\vec{r} = \int\limits_{L_+} \vec{F} d\vec{r} + \int\limits_{L_+} \vec{Q} d\vec{r} \quad \text{и} \quad \int\limits_{L_1^+ \cup L_2^+} \vec{F} d\vec{r} = \int\limits_{L_1^+} \vec{F} d\vec{r} + \int\limits_{L_2^+} \vec{F} d\vec{r}$$

2^0 $\int\limits_{L_+} \vec{F} d\vec{r} = -\int\limits_{L_-} \vec{F} d\vec{r}$

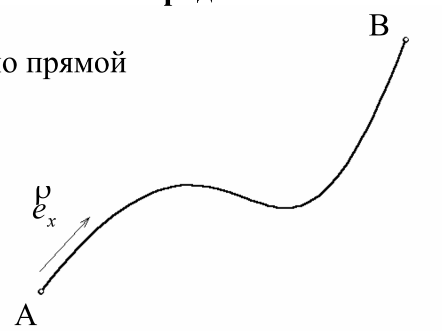


$L_+ = AB$

$L_- = BA$

Физический смысл этого свойства заключается в следующем утверждении: *работа сил в поле в одном направлении, равна работе сил со знаком минус в другом направлении*

Связь между криволинейными интегралами 1 и 2 рода.



Зададим касательный вектор движения по прямой

$$\vec{e}_+ = \frac{(dx, dy)}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} = \frac{(x_t', y_t')}{dl}$$

$$\vec{r}' = (x_t', y_t')$$

$$\vec{e}_+ dl = \vec{r}' dt \,, \ |\vec{r}'| dt = dl$$

$$\left(\vec{F}\vec{e}_+\right) = f$$

$$\int_{L_+} \vec{F} d\vec{r} = \int_L (\vec{F}\vec{e}_+)|\vec{r}'| dt = \int_L (\vec{F}\vec{e}_+) dl = \int_L f dl$$

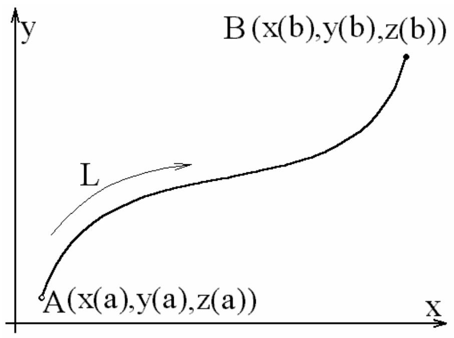
,а этот интеграл является интегралом первого типа.

Аналогично определим криволинейный интеграл второго рода в $\Re^3$.

Рассмотрим векторное поле $\vec{F} = \left(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\right)$, для которого $\vec{r} = (x, y, z)$ является радиус вектором, тогда

$d\vec{r} = \left(dx, dy, dz\right)$, и

$dl = \left|d\vec{r}\right| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$



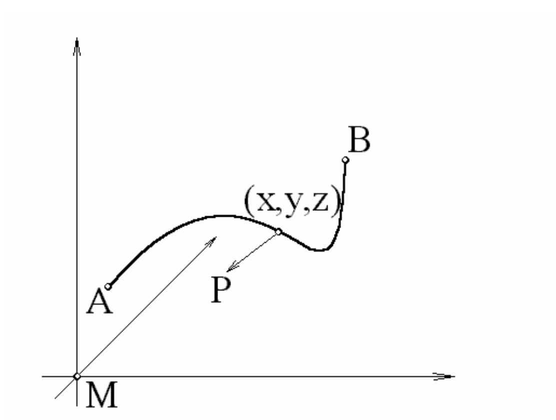
Кривая L задается системой $L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$.

По определению:

$$\int_{L_+} \vec{F} d\vec{r} = \int_{L_+} \left(Pdx + Qdy + Rdz\right) = \int_a^b \left(Px' + Qy' + Rz_t'\right) dt \,,$$

а это криволинейный интеграл второго рода в пространстве. Независимость от выбора параметра доказывается также, как и в $\Re^2$.

Пример



Рассмотрим пример, в котором точка с массой M находится в начале координат и неподвижна, а точка m, с массой m, движется по AB.

Вычислить работу по перемещению точки m, приняв гравитационную постоянную равной γ.

$$\vec{F} = \frac{-\gamma m M \vec{r}}{\left|\vec{r}^3\right|}, \text{ т.е.}$$

$$\vec{F} = -\frac{mM\gamma\left(x, y, z\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$$

$$A = \int\limits_{L_+} \vec{F}d\vec{r} = mM\gamma \int \frac{-xdx - ydy - zdz}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$$

$$L_+ : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \text{а}$$

точки А и В имеют координаты $A\big(x(a), y(a), z(a)\big)$ и $B\big(x(b), y(b), z(b)\big)$ соответственно.

$$A = mM\gamma \int\limits_a^b \frac{-x(t)x'(t)dt - y(t)y'(t)dt - z(t)z'(t)dt}{\left(\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}\right)^3}$$

рассмотрим $U\big(x(t), y(t), z(t)\big) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}\right)}$, тогда $U'(t)$, как производная сложной функции от нескольких переменных, будет равна

$U'(t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}x'(t) + \dfrac{\partial u}{\partial y}y'(t) + \dfrac{\partial u}{\partial z}z'(t)$,для вычисления $U'(t)$, представим $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ в виде

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{y}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{z}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$,соответственно,

тогда подставив эти выражения в уравнение для $U'(t)$, получаем:

$U'(t) = \dfrac{-x(t)x'(t) - y(t)y'(t) - z(t)z'(t)}{\left(\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}\right)^3}$, а так как работа выражается через определенный интеграл, то подставив это выражение, получаем

$$A = mM\gamma \int\limits_a^b U'(t)dt = mM\gamma \cdot U(t)\Big|_a^b = mM\gamma\big[U(x(b), y(b), z(b))) - U(x(a), y(a), z(a))\big] =$$

$$= mM\gamma\big[U(B) - U(A)\big] = \frac{mM\gamma}{\sqrt{(x(b))^2 + (y(b))^2 + (z(b))^2}} - \frac{mM\gamma}{\sqrt{(x(a))^2 + (y(a))^2 + (z(a))^2}}$$

Заметим, что работа в гравитационном поле не зависит от выбора пути, а зависит только от начальной А и конечной В точек этого пути.