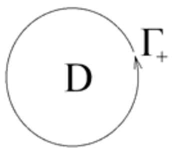
Лекция 5

Формула Грина.

В настоящем разделе рассмотрим формулу, связывающую двойной и криволинейный интегралы.



$\oint\limits_{\Gamma_+} Pdx + Qdy$, интеграл $\oint$ называется интегралом по замкнутому контуру.

Условимся называть положительным направлением обхода простого замкнутого контура то, при котором ближайшая к наблюдателю часть области, ограниченной контуром, оказывается лежащей слева от наблюдателя.

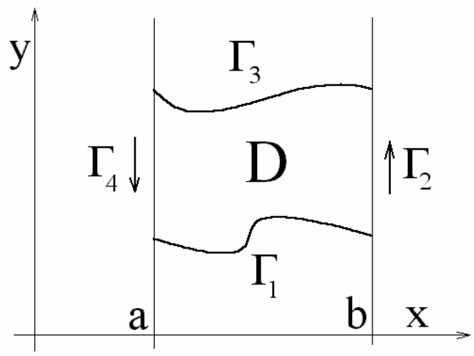
Пусть $\vec{F} = (P, Q)$ и $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} \in C(D)$, т.е.непрерывны на (D) и Г- замкнутый кусочногладкий контур, тогда имеет место формула:

$\boxed{\oint\limits_{\Gamma_+} Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \right)}$,которая называется формулой Грина.

Для вывода формулы будем сводить вычисление интеграла по замкнутой кривой к интегралу от области, заключенной внутри этой кривой.

Разобьем вывод на несколько пунктов:

1) Область D есть криволинейная трапеция:



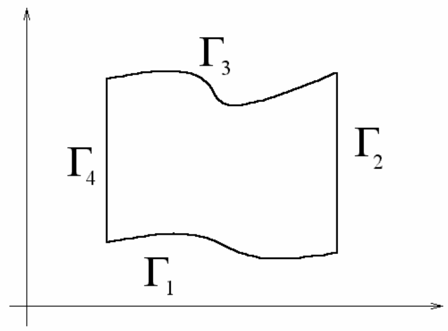
Докажем равенство

$$\oint\limits_{\Gamma_+} Pdx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

Мы знаем, что

$$\oint\limits_{\Gamma_+} = \int\limits_{\Gamma_1} + \int\limits_{\Gamma_2} + \int\limits_{\Gamma_3} + \int\limits_{\Gamma_4} \quad \text{и}$$

$\int\limits_{\Gamma_1} P(x, y)dx = \int\limits_a^b P(x, \varphi_1(x))dx$, где $\Gamma_1 : y = \varphi_1(x)$,



$$\int\limits_{\Gamma_2} Pdx = 0, \quad x = b, dx = 0$$

$$\int\limits_{\Gamma_3} P(x, y)dx = \left| \Gamma_3 ; y = \varphi_2(x) \right| = \int\limits_b^a P(x, \varphi_2(x))dx = -\int\limits_a^b P(x, \varphi_2(x))dx$$

$$\int\limits_{\Gamma_4} Pdx = 0, \quad x = a,\ dx = 0$$

Запишем теперь интеграл по контуру в виде

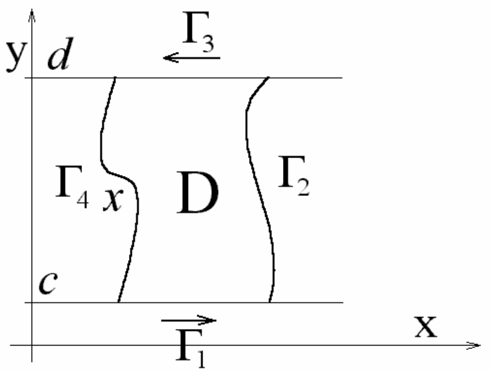
$\oint\limits_{\Gamma_+} Pdx = \int\limits_a^b P(x, \varphi_1(x))dx - \int\limits_a^b P(x, \varphi_2(x))dx = \int\limits_a^b (P(x, \varphi_1(x))dx - P(x, \varphi_2(x)))dx$, а двойной интеграл будет выглядеть соответственно:

$$-\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int\limits_a^b dx \Big(P(x, y) \Big|_{y=p_1(x)}^{y=p_2(x)} \Big) = -\int\limits_a^b \big(P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x)) \big) dx =$$

$= \int\limits_a^b \big(P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x)) \big) dx$, следовательно,

$\oint\limits_{\Gamma_+} Pdx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$ - первая часть равенства доказана.

2) Докажем теперь и вторую часть равенства. Пусть *D* – криволинейная трапеция, изображенная на рисунке:

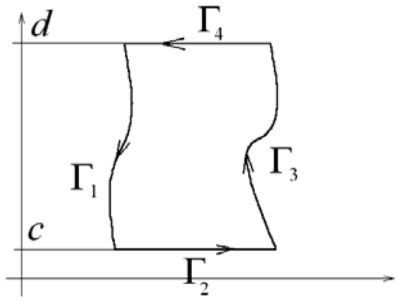


$$\oint\limits_{\Gamma_+} Qdy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$

Запишем теперь интегралы от отдельных участков кривой, причем интегралы от Γ_2 и Γ_4 будут равны нулю:

$$\int\limits_{\Gamma_2} Qdy = \int\limits_{\Gamma_3} Qdy = 0 \ , y = const, dy = 0 .$$

Интегралы от Γ_1 и Γ_3 будут равны соответственно:



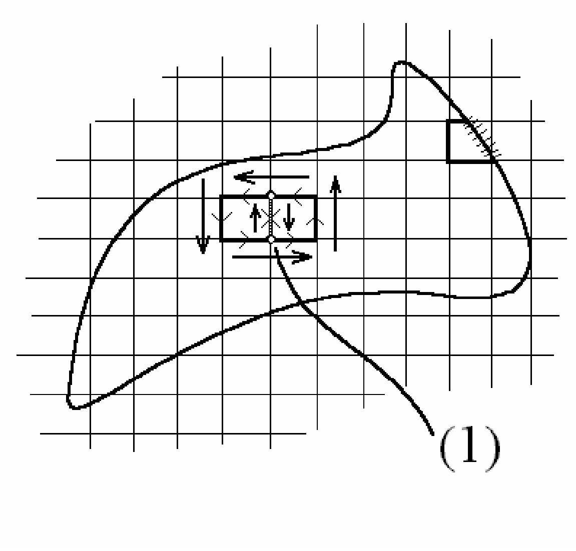
$$\int\limits_{\Gamma_1} Q(x,y)dy = \int\limits_d^c Q(\psi_1(y),y)dy = -\int\limits_c^d Q(\psi_1(y),y)dy$$

$\int\limits_{\Gamma_3} Q(x,y)dy = \int\limits_c^d Q(\psi_2(y),y)dy$, тогда

$\oint\limits_{\Gamma_+} Qdy = -\int\limits_c^d Q(\psi_1(y),y)dy + \int\limits_c^d Q(\psi_2(y),y)dy = \int\limits_c^d \big(Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y)\big)dy$ Запишем двойной интеграл в виде $\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int\limits_c^d dx \Big(Q(x,y)\Big|_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)}\Big) =$

$= \int\limits_c^d \big(Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y)\big)dy$, следовательно, мы доказали, что $\oint\limits_{\Gamma_+} Qdy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$, но ранее мы также доказали, что $\oint\limits_{\Gamma_+} Pdx = \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$, следовательно, $\oint\limits_{\Gamma_+} Pdx + Qdy$ можно представить как $\oint\limits_{\Gamma_+} Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$.

Пусть *D* – произвольная область, ограниченная кусочногладкой кривой. Разобьем *D* на несколько областей прямыми, как показано на рисунке.



Интеграл по границе двух элементов (1) равен нулю, так как он вычисляется дважды в противоположных направлениях, следовательно, сумма всех криволинейных интегралов будет равна интегралу по границе *D*.

Рассмотрим теперь некоторые следствия из формулы Грина.

Следствия:

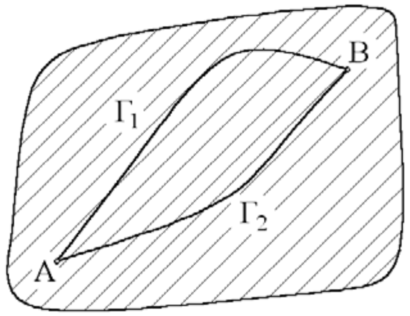
1) Пусть $Q = x, P = -y$,

тогда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ и $\int\limits_{\Gamma_+} xdy = ydx = 2\iint\limits_D dxdy = S(D)$

2) Пусть $P = C_1, Q = C_2$, C_1, C_2 - константы,

тогда $\oint\limits_{\Gamma} C_1 dx + C_2 dy = \iint\limits_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$.

Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования в односвязной области на плоскости



Определение односвязности:

Опр. Область *D* называется односвязной, если для простой замкнутой кривой, являющейся границей области D_1 следует $D_1 \subset D$.

Следующие четыре условия – являются условиями эквивалентности:

1) $\int\limits_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma_2} Pdx + Qdy$ (кривые Γ_1 и Γ_2 имеют одинаковое начало – точку А и одинаковый конец – точку В)

2) $\oint\limits_{\Gamma_+} Pdx + Qdy = 0$ справедливо для любой кусочногладкой замкнутой кривой Г.

3) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\forall (x, y) \in D$.

4) $\exists U(x, y) : dU = Pdx + Qdy$, в этом случае $\int\limits_{\Gamma_{AB}} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)$.

Доказательство:

1)~2) $\int\limits_{\Gamma_1(A\to B)} Pdx + Qdy = -\int\limits_{\Gamma_1(B\to A)} Pdx + Qdy$

$$\int\limits_{\Gamma_2(A\to B)} Pdx + Qdy + \int\limits_{\Gamma_1(B\to A)} Pdx + Qdy = \oint\limits_{\Gamma_1\Gamma_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\int\limits_{\Gamma_1(A\to B)} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma_2(B\to A)} Pdx + Qdy .$$

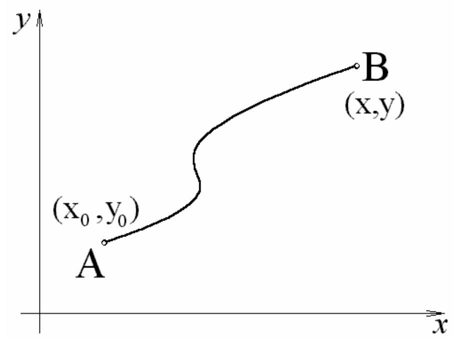
2)~3) $\oint\limits_{\Gamma_+} PdxQdy = 0$, применим формулу Грина:

$\iint\limits_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$,следовательно,

$$0 = \oint\limits_{\Gamma_\varepsilon} Pdx + Qdy = \iint\limits_{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le \varepsilon^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{x=x_1, y=y_1} \pi\varepsilon^2 = 0 \text{, но}$$

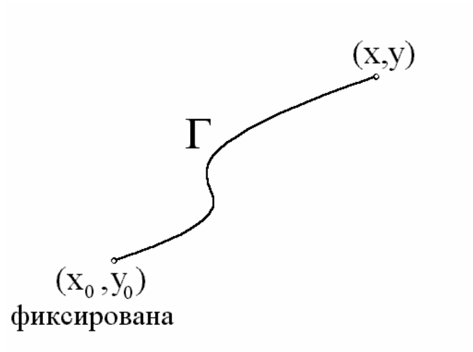
$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_1, y_1) = \frac{\partial P}{\partial y}(x_1, y_1)$, а при $\varepsilon \to 0, (x_1, y_1) \to (x_0, y_0)$,следовательно,

$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$.



4)~1) $\quad \Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,это можно представить в виде: $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(t) = Pdx + Qdy$, итак,

$\int\limits_{\Gamma_{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{AB} \frac{du}{dt} dt = U(B) - U(A)$.



Дифференциальное выражение $Pdx + Qdy$ похоже на выражение полного дифференциала функции $F(x, y)$ от двух переменных $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$,которое отождествляется с $Pdx + Qdy$, если положить $\frac{\partial U}{\partial x} = P, \frac{\partial U}{\partial y} = Q$.

$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = U(x, y)$,докажем, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P, \frac{\partial U}{\partial y} = Q$, следовательно $du = Pdx + Qdy$.

$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x}^{x + \Delta x} Pdx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{P(x, y)\Delta x}{\Delta x} = P(x, y)$,а выражение для $\frac{\partial U}{\partial y}$ примет вид $\frac{\partial U}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{U(x, y + \Delta y) - U(x, y)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{y}^{y + \Delta y} Qdy = Q(x, y)$,

следовательно, $du = Pdx + Qdy$ является точным дифференциалом.