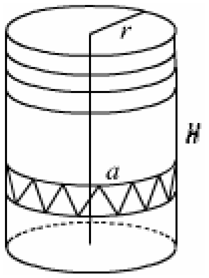
25.03.03

Площадь поверхности

Если определять площадь поверхности объемной фигуры по аналогии с плоской поверхностью, как точная нижняя грань суммы площадей граней описанного многогранника, то полученный результат будет неверным. Докажем это:

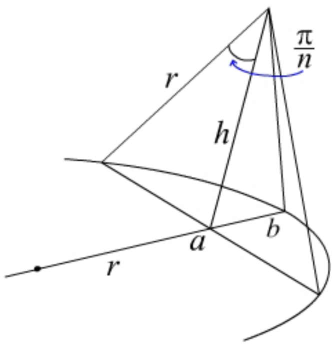


Пусть дан цилиндр с радиусом r и высотой h. По известной формуле площадь его боковой поверхности равна:

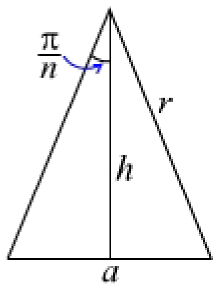
$$S = 2\pi rh$$

Найдем теперь площадь цилиндра, как точную нижнюю грань площадь описанного многогранника.

Разобьем цилиндр на m дисков, каждый диск – на n треугольников со стороной a (см. рис.). Их суммарная площадь будет равна $2nmS_\Delta$, а площадь цилиндра равна:



$$S_ц = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} 2nmS_\Delta$$



Из треугольника на рисунке $\to$ видно, что

$$\frac{a}{2} = r\sin\frac{\pi}{n} \Rightarrow a = 2r\sin\frac{\pi}{n}$$

Так как $(2r-b)\cdot b = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, значит, поскольку $\frac{a}{2} = r\sin\frac{\pi}{n}$, получим

$$b^2 - 2rb + r^2\sin^2\frac{\pi}{n} = 0 \text{ и } b = r \pm r\cos\frac{\pi}{n} \Rightarrow b = r - r\cos\frac{\pi}{n} \text{ (т.к. } b < r\text{).}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{H}{m}\right)^2 + r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2} \text{ и}$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ah = 2r\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\left(\frac{H}{m}\right)^2 + r^2\underbrace{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}_{=4\sin^4\frac{\pi}{2n}}}\,.$$

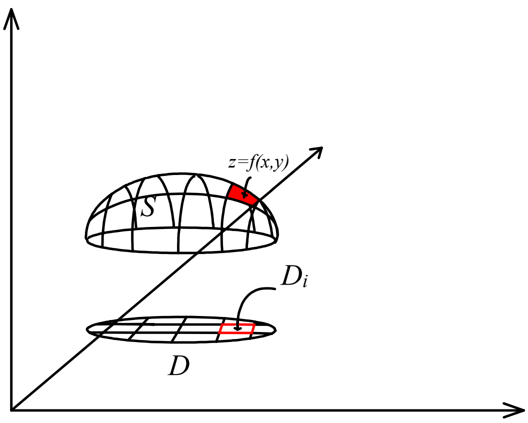
Необходимо проверить, что $2\pi rH \overset{?}{=} \lim\limits_{n,m\to\infty} 2mr\underbrace{n\sin\frac{\pi}{n}}_{\to\pi}\sqrt{H^2 + r^2 4m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}$.

Это равно: $\lim\limits_{n,m\to\infty} 2\pi r m\sqrt{\left(\frac{H}{m}\right)^2 + r^2 4\sin^4\frac{\pi}{2n}}$. Отсюда получим, выбирая $m = n^2$:

$\lim\limits_{n,m\to\infty} 2\pi r\sqrt{H^2 + r^2 4\underbrace{n^4\sin^4\frac{\pi}{2n}}_{\to\frac{\pi^2}{16}}} \neq 2\pi r H$. Этот пример называется сапог Шварца.

Поэтому для определения площади используют следующую модель. Пусть:

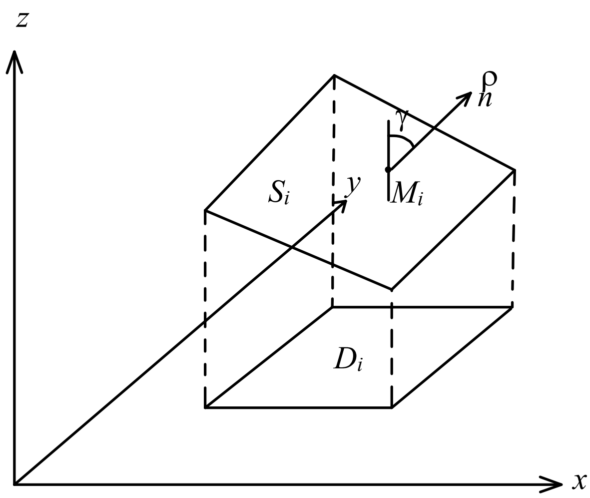
$$f(x,y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(D).$$



Функция $f(x,y)$ дифференцируема в любой точке из D, следовательно, в любой точке S существует касательная плоскость.

Теперь разобьем компакт D и спроектируем разбиение на S. В i-м элементе разбиения возьмем точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ и построим в ней касательную плоскость. Теперь спроектируем i-й элемент D_i компакта D на эту плоскость. Получим плоскую область S_i. Площадь S <u>определяется</u>, как $\boxed{|S| = \lim\limits_{d(T)\to 0}\sum_i S_i}$, если существует интегральная сумма

$\lim\limits_{d(T)\to 0} I(T) = S,$ где I зависит от разбиения T (см. рис.).



$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – нормальный вектор, n_i – косинусы углов наклона этого вектора к осям координат:

$$n_1 = \cos\alpha, n_2 = \cos\beta, n_3 = \cos\gamma.$$

Между D_i и S_i существует следующая связь:

$$D_i = S_i \cdot |\cos\gamma|,$$

где γ – угол наклона нормали к оси z. Отсюда получим:

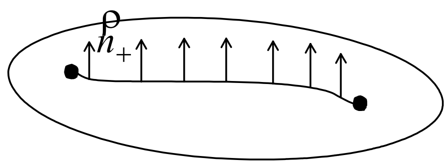
$$S_i = \frac{D_i}{|\cos\gamma|}.$$

Нормаль имеет следующие координаты:

$$\vec{n} = \pm \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

$\pm$ в этом выражении появляется из-за того, что нормаль может иметь два противоположных направления – «вверх» и «вниз», поэтому для определенности рассматриваются **двухсторонние поверхности**.

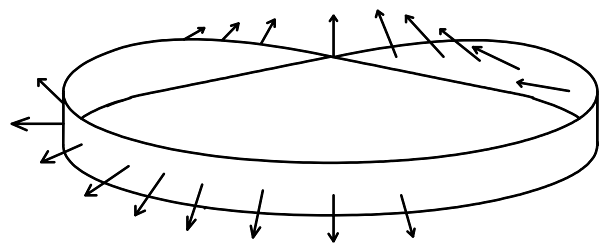
<u>Определение</u>: двухсторонней поверхностью называют такую поверхность, в каждой точке которой нормаль определена однозначно.



При движении по любой кривой на этой поверхности нормаль к поверхности определяется однозначно.

ПРИМЕР:

Односторонняя поверхность – лента Мебиуса:



Для определенности в расчетах будем использовать $\vec{n}_+$.

$$S_i = \frac{D_i}{|\cos\gamma|},$$

$$\cos\gamma = \left.\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\right|_{\left.\begin{array}{l} x = \xi_i \\ y = \eta_i \end{array}\right\} \text{точка } M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \sum_i S_i = \sum_i \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \cdot D_i \xrightarrow[d(T)\to 0]{} \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

Площадь поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \qquad (1)$$

В общем случае, площадь поверхности определяется в параметрическом виде:

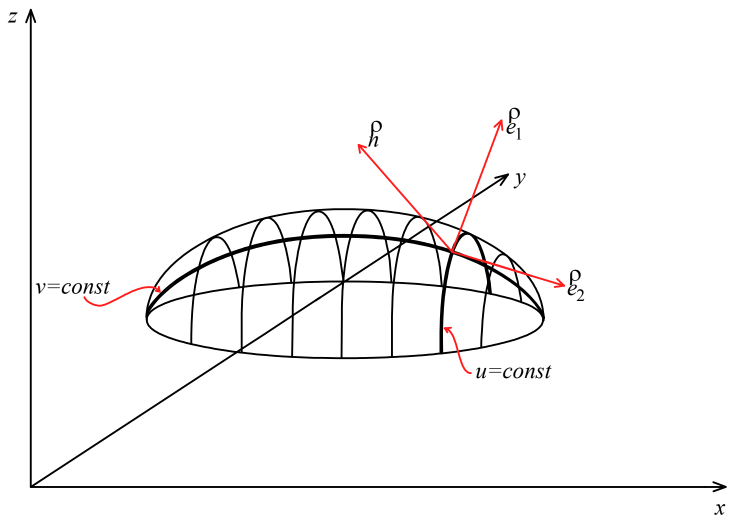
$$S = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Уравнение нормали.

Обозначим

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}\right) \\ \vec{e}_2 = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}\right) \end{cases}$$

$\vec{h} \perp \vec{e}_1; \vec{h} \perp \vec{e}_2.$



Зафиксируем переменную *v*. Тогда *x, y, z* – функции, зависящие от *u*, и задающие на поверхности *S* координатную линию. Аналогично, фиксируя *u*, получим другую координатную линию на поверхности. В результате последовательного фиксирования *v* и *u* получим **координатную сетку** на *S*.

$$\vec{h} = \frac{\pm(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|} \qquad (2)$$

Если $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = 0$, то поверхность S – **вырождена**.

Перепишем уравнение (1), учитывая (2):

$$\boxed{S = \iint\limits_D \underbrace{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| dudv}_{\substack{\text{Дифференциал} \\ \text{поверхности}=\boldsymbol{dS}}}}$$

Модуль векторного произведения $|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|$ можно представить так:

$$|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \sin\gamma = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \sqrt{1-\cos^2\gamma} =$$

$$= \sqrt{\vec{e}_1^{\,2}\vec{e}_2^{\,2} - \left(\vec{e}_1^{\,2}\vec{e}_2^{\,2}\cos\gamma\right)^2} = \sqrt{\vec{e}_1^{\,2}\vec{e}_2^{\,2} - (\vec{e}_1\vec{e}_2)^2}$$

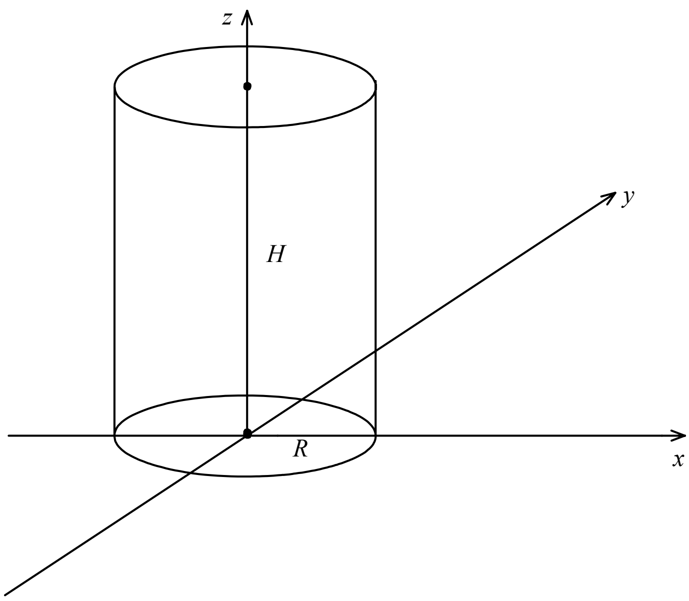
Пусть $z = f(x,y)$ и $x = u$. Тогда уравнения для $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ будут выглядеть так:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \left(1,\, 0,\, \dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \vec{e}_2 = \left(0,\, 1,\, \dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \end{cases} \text{и } |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = \sqrt{\left|\left(1+\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right|} \overset{КАК?!!}{=}$$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

ПРИМЕРЫ:

1) Площадь боковой поверхности цилиндра.



$$\begin{cases} x = R\cos u \\ y = R\sin u \\ r = v \end{cases}$$

и

$$\vec{e}_1 = (-R\sin u,\, R\cos u,\, 0)$$

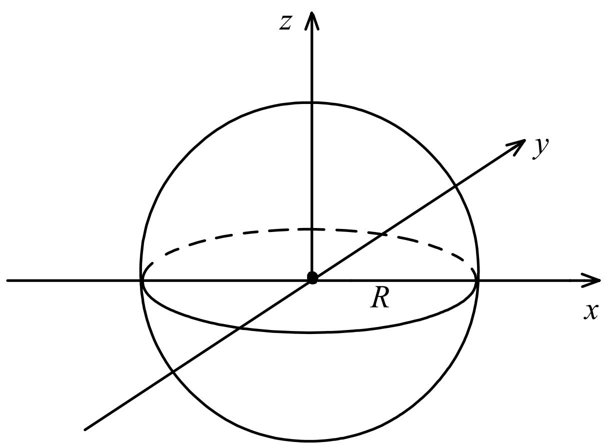
$$\vec{e}_2 = (0,\, 0,\, 1)$$

Тогда:

$$\begin{cases} \vec{e}_1^{\,2} = R^2 \\ \vec{e}_2^{\,2} = 1 \end{cases} \Rightarrow (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$$

$$S = \int_0^{2\pi} du \int_0^{H} R dv = \underline{2\pi RH}.$$

2) Площадь сферы.



$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta\,, \quad \text{где} \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

$0 \le \varphi \le \pi \quad 0 \le \theta \le 2\pi$,

$|\vec{e}_1 \times e_2| = R^2 \sin\varphi$, поэтому

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} R^2 \sin\varphi d\varphi =$$

$$= 2\pi \cdot 2R^2 = \underline{4\pi R^2}.$$

Поверхностные интегралы

Поверхностные интегралы первого рода:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \underbrace{\iint f\,|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|\,dudv}_{\text{Если поверхность задана параметрически}} .$$

$$S = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$ – невырожденная поверхность.

Если $f = 1 \Rightarrow \iint\limits_S dS = |S|$.

Поверхностные интегралы второго рода:

Пусть есть вектор функция $F(P,Q,R)$. Выберем положительную нормаль:

$$n_+ = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}$$, тогда

$$\iint\limits_{S_+} \vec{F} d\vec{S} = \iint\limits_S \left(\underbrace{\vec{F} \cdot [\vec{e}_1 \times \vec{e}_2]}_{\text{смешанное произведение}} \right) dudv = \iint\limits_D < \vec{F}, \vec{e}_1, \vec{e}_2 > dudv$$, где

$$< \vec{F}, \vec{e}_1, \vec{e}_2 > = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} .$$

Если S такова, что $z = f(x,y)$, тогда:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R$$. Таким образом,

получаем:

$$\iint\limits_{S_+} \vec{F} dS = \pm \iint\limits_D \left(R - P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy$$

ПРИМЕР:

$\vec{F} = \vec{r} = (x,y,z)$.

Уравнение поверхности сферы: $S = x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Зададим сферические координаты:

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\sin\varphi \end{cases}$$ Тогда

$$\iint_S \vec{r}\,d\vec{S} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} |I|\,d\varphi \text{, где}$$

$$|I| = \begin{vmatrix} R\sin\varphi\cos\theta & R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\theta \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R^3\left[\sin\varphi\sin\theta(\sin^2\varphi\sin\theta + \cos^2\varphi\sin\theta) + \sin\varphi\cos\theta(\sin^2\varphi\cos\theta + \cos^2\varphi\cos\theta)\right] =$$

$$= R^3\left[\sin\varphi\sin^2\theta + \sin\varphi\cos^2\theta\right] = R^3\sin\varphi.$$

Следовательно, поверхностный интеграл запишется, как:

$$\iint_S \vec{r}\,dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} R^3\sin\varphi\,d\varphi = 4\pi R^3 = 3V_R\ .$$