Лекция 7

Формула Гаусса-Остроградского

Формула Гаусса-Остроградского является одной из наиболее важных формул в векторном анализе. Она связывает поток векторного поля через замкнутую поверхность с напряженностью векторного поля внутри замкнутой поверхности. Для векотрного поля $\vec{F}=(P;Q;R)$:

$$\oiint\limits_{S_{внеш}} \vec{F}\, d\vec{s} = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz \quad ,$$

причем поверхностный интеграл потока векторного поля берется по поверхности через внешнюю сторону (вектор нормали к поверхности направлен «наружу»). Правую часть формулы можно переписать в виде:

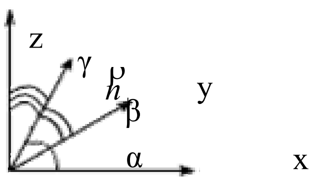
$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iiint\limits_V div\,\vec{F} dxdydz = \iiint\limits_V \nabla\,\vec{F} dxdydz\ ,$$

где $div\vec{F}=\nabla\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ – дивергенция векторного поля $\vec{F}$, $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$ – оператор Гамильтона (набла).

Формула Гаусса-Остроградского справедлива, если выполняются два условия. Во-первых, поверхность S должна быть кусочно-гладкой, т.е. такой, что в любой ее точке можно провести касательную плоскость (поверхность задается дифференцируемыми функциями) и двусторонней (направление нормали при движении вдоль поверхности сохраняется. Во-вторых, векторное поле $\vec{F}=(P;Q;R)$ должно быть таким, что функции $P=P(x,y,z), Q=Q(x,y,z), R=R(x,y,z)$ и их частные производные по x, y и z непрерывны в области V.

Другие варианты формулы Гаусса-Остроградского.

Запишем выражение для вектора нормали: $\vec{n}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$, где α,β,γ – углы,



которые вектор нормали составляет с осями координат. $d\vec{s}=\vec{n}\,ds$.

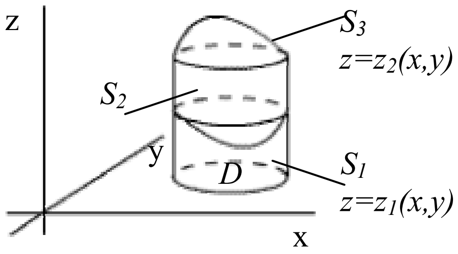
Отсюда $\oiint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds = \iiint\limits_V div\,\vec{F} dxdydz$

Кроме того, имеет место следующая формула: $\oiint\limits_S (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy) = \iiint\limits_V div\,\vec{F} dxdydz$

Доказательство формулы (1 вариант):

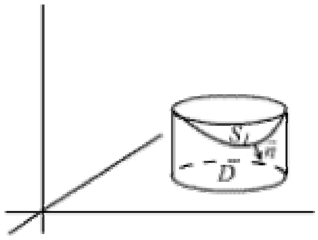
$\oiint\limits_{S_{внеш}} (\vec{F}\cdot\vec{n}_{внеш})d\,s = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$ Представим векторное поле в виде суммы векторных полей: $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$, где $\vec{F}_1=(0,0,R), \vec{F}_2=(0,Q,0), \vec{F}_3=(P,0,0)$, найдем потоки этих векторных полей по отдельности, а затем сложим их.

Рассмотрим сначала случай поля $\vec{F}_1$. Замкнутая поверхность является цилиндроидом, ограниченным сверху и снизу поверхностями, заданными в явном виде: $z=z_1(x,y)$(снизу) и



$z = z_2(x, y)$ (сверху). Поверхность S состоит из нижней S_1, боковой S_2 и верхней S_3 поверхностей. Рассмотрим поверхностный интеграл по S_1. D – проекция S_1 на плоскость xy.

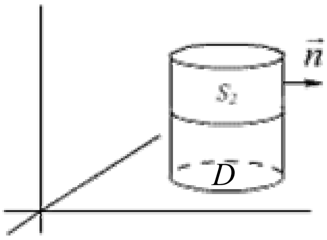
Координаты вектора нормали:
$$\vec{n} = \pm \frac{\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}; \frac{\partial z_1}{\partial y}; -1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2}}.$$



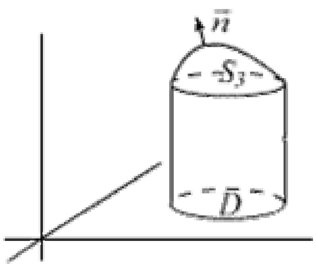
Так как вектор нормали направлен вниз (координата по z отрицательна), то в формуле для $\vec{n}$ нужно выбрать знак «+». $\vec{F}_1 \cdot \vec{n} = (0, 0, R) \cdot \vec{n} = -\dfrac{R(x, y, z_1(x, y))}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2}}$.

Дифференциал поверхности равен: $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2} \cdot dxdy$ Отсюда

$$\iint_{S_1} (\vec{F}_1 \cdot \vec{n}) d\,s = \iint_D -\frac{R(x, y, z_1(x, y))}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2} \cdot dxdy = \iint_D -R(x, y, z_1(x, y))dxdy$$



Интеграл по боковой поверхности S_2. Вектор нормали $\vec{n} = (n_1; n_2; 0)$, так как нормаль параллельна плоскости xy. $\vec{F}_1 \cdot \vec{n} = (0; 0; R) \cdot \vec{n} = 0$. Какая бы ни была боковая поверхность, интеграл по ней равен нулю: $\iint_{S_2} (\vec{F}_1 \cdot \vec{n}) d\,s = 0$



Интеграл по поверхности S_3Рассматривается аналогично интегралу по поверхности S_1 с той разницей, что вектор нормали направлен в противоположную сторону – вверх: $\vec{n} = \dfrac{\left(-\frac{\partial z_2}{\partial x}; -\frac{\partial z_2}{\partial y}; 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)^2}}$. Скалярное произведение $\vec{F}_1$ на вектор нормали: $\vec{F}_1 \cdot \vec{n} = \dfrac{R(x, y, z_2(x, y))}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)^2}}$,

дифференциал поверхности: $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)^2} \cdot dxdy$

$$\iint\limits_{S_3} (\vec{F_1} \cdot \vec{n}) d\,s = \iint\limits_{D} R(x, y, z_1(x, y))dxdy$$

Сложим интегралы по поверхностям S_1, S_2 и S_3:

$$\oiint\limits_{S_{внеш}} \left(\vec{F_1} \cdot \vec{n}\right) ds = \iint\limits_{S_1} \left(\vec{F_1} \cdot \vec{n}\right) ds + \iint\limits_{S_2} \left(\vec{F_1} \cdot \vec{n}\right) ds + \iint\limits_{S_3} \left(\vec{F_1} \cdot \vec{n}\right) ds = \iint\limits_{D} -R(x, y, z_1(x, y))dxdy + \iint\limits_{D} R(x, y, z_2(x, y))dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} (R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y)))dxdy$$

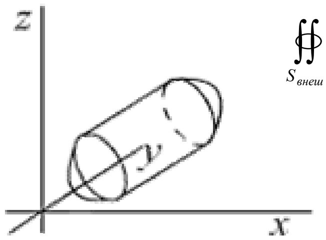
Рассмотрим тройной интеграл по объему V:

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \cdot dz = \iint\limits_{D} \left(R(x, y, z) \Big|_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} \right) dxdy = \iint\limits_{D} (R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y)))dxdy$$

Таким образом, для векторного поля $\vec{F_1} = (0,0,R)$ формула Гаусса-Остроградского

$\oiint\limits_{S_{внеш}} \vec{F_1} \cdot d\,\vec{s} = \iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$ доказана.

Аналогично доказывается формула, если взять поле $\vec{F_2}$, и в качестве замкнутой поверхности взять цилиндроид, ось которого направлена вдоль оси y. $\vec{F_2} = (0,Q,0)$



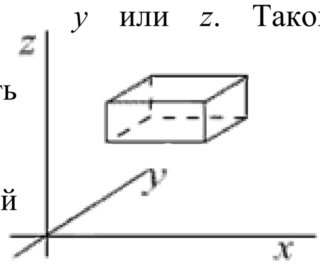
$\oiint\limits_{S_{внеш}} \vec{F_2} \cdot d\,\vec{s} = \iiint\limits_{V} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz$ (доказывается аналогично)

Аналогично и для поля $\vec{F_3} = (P,0,0)$:

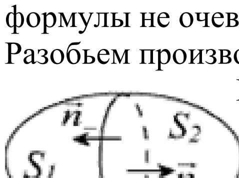
$$\oiint\limits_{S_{внеш}} \vec{F_3} \cdot d\,\vec{s} = \iiint\limits_{V} \frac{\partial P}{\partial y} dxdydz$$

Если взять поле $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$, то $\oiint\limits_{S_{внеш}} \vec{F}\, d\,\vec{s} = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$ – формула Гаусса-Остроградского в общем виде верна.

При доказательстве мы использовали замкнутую поверхность, которая может быть представлена как цилиндроид с осью, направленной вдоль осей x, y или z. Такой поверхностью является прямоугольный параллелепипед. Если рассмотреть произвольную поверхность, то справедливость формулы не очевидна.



Разобьем произвольную поверхность на две – S_1 и S_2.



Проинтегрируем векторное поле по каждой поверхности и сложим. Получатся интегралы по S_1, S_2 и два интеграла по сечению. Интегралы по сечению отличаются только знаком (так как векторы нормалей направлены в разные стороны), они уничтожаются при сложении. Поэтому поверхность можно разбивать на части, интегрировать по ним, результаты складывать.

Произведем сечение замкнутой поверхности большим числом перпендикулярных плоскостей. Формула Гаусса-Остроградского будет верна всюду, кроме границ поверхности, на границах становится справедливой при устремлении диаметра разбиения к нулю. Отсюда следует, что формула Гаусса-Остроградского справедлива для любой кусочно-гладкой поверхности.

<u>Пример.</u>

В качестве поля $\vec{F}$ возьмем радиус-вектор: $\vec{F} = \vec{r} = (x, y, z)$, S – сфера радиуса R с центром в начале координат.

Для нахождения потока вектора воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского:

$$\oiint\limits_{S_{внеш}} \vec{r} d\vec{s} = \iiint\limits_V div\,\vec{r} dxdydz = \iiint\limits_V 3dxdydz = 3|V| = 3V_{сферы} = 4\pi R^3$$

Формула Ньютона-Лейбница представляет интеграл по отрезку по значениям первообразной на границах отрезка. Формула Гаусса-Остроградского представляет собой, по существу, то же самое (вместо отрезка – объем, вместо границ отрезка – замкнутая поверхность). Эту формулу, как и формулу Грина, можно считать обобщением формулы Ньютона-Лейбница.