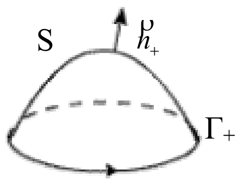
Лекция 8.

Формула Стокса

Эта формула, как и формула Гаусса-Остроградского, является одной из важнейших в курсе. Для того, чтобы ее вывести, введем понятие *ротора* векторного поля:

Определение. Назовем ротором величину: $rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$

(Существует и другое обозначение ротора: $rot\vec{F} = \left[\nabla \times \vec{F}\right] = \left[\nabla\vec{F}\right] = \nabla \times \vec{F}$. По существу, ротор является «векторным произведением» оператора Гамильтона на вектор $\vec{F}$ в данной точке пространстве). Ротор является одной из характеристик поля.



Пусть задана поверхность *S,* выбрано направление вектора нормали. Считаем, что поверхность гладкая, а контур Γ_+ – кусочно-гладкий. Формула Стокса имеет вид:

$$\boxed{\oint\limits_{\Gamma_+} \vec{F} d\vec{r} = \iint\limits_{S_+} rot\,\vec{F} d\vec{s}}$$

Связь ориентации нормали $\vec{n}_+$ с направлением обхода можно осуществить при помощи «правила буравчика»: направление движения правого винта при вращении по направлению обхода Γ_+ указывает направление вектора нормали $\vec{n}_+$. Другой способ: если смотреть из конца вектора $\vec{n}_+$, то обход Γ_+ будет осуществляться против часовой стрелки.

Перепишем формулу Стокса в другом виде:

$$\oint\limits_{\Gamma_+} \left(Pdx + Qdy + Rdz\right) = \iint\limits_{S} \left(rot\vec{F} \cdot \vec{n}_+\right) ds$$

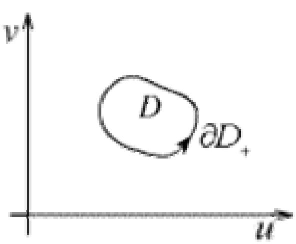
Левая часть – это криволинейный интеграл второго типа, а правая – поверхностный интеграл первого рода.

Формула Стокса доказывается в предположении, что функции *P, Q* и *R* – непрерывно дифференцируемы, поверхность, как уже было сказано, гладкая, контур – кусочно-гладкий.

Представим поле в виде суммы: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$; $\vec{F}_1 = (P;0;0)$; $\vec{F}_2 = (0;Q;0)$; $\vec{F}_3 = (0;0;R)$.

Доказательство проведем для каждого из полей $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ по отдельности.

Ротор поля $\vec{F}_1$: $rot\vec{F}_1 = \left(0; \frac{\partial P}{\partial z}; -\frac{\partial P}{\partial y}\right)$. Будем считать, что поверхность *S* задается системой уравнений: $S: \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v). \end{cases}$ Обход контура ∂D_+ осуществляется против часовой стрелки – область *D* остается слева от контура.



Правая часть формулы: $\iint\limits_S rot\vec{F}_1 d\vec{s} = \iint\limits_D \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial P}{\partial z} & -\dfrac{\partial P}{\partial y} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv$

Левая часть - $\oint\limits_{\Gamma_+} \vec{F}_1 d\vec{r} = \int\limits_{\Gamma_+} Pdx$, в пространстве переменных u,v будет иметь вид: $\int\limits_{\Gamma_+} Pdx = \oint\limits_{\partial D_+} P\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}du + \dfrac{\partial x}{\partial u}du\right) = \oint\limits_{\partial D_+}\left(P\dfrac{\partial x}{\partial u}du + P\dfrac{\partial x}{\partial v}dv\right)$. Отсюда по формуле Грина

$$\oint\limits_{\partial D_+}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}du + P\frac{\partial x}{\partial v}dv\right) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)dudv =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} - \frac{\partial P}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)dudv = \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)dudv$$

Вычислим производные по u и v.

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)dudv = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\right]du$$

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)\right]dudv = \iint\limits_D \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial P}{\partial z} & -\dfrac{\partial P}{\partial y} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv$$

Совершенно аналогично выглядит доказательство для полей $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$.

Формула Грина является частным случаем формулы Стокса. Рассматривается случай плоской поверхности, вектор нормали имеет координаты $\vec{n}_+ = (0,0,1)$

$$rot\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Из формулы Грина вытекает следствие о независимости интеграла от пути интегрирования на плоскости. Аналогично можно вывести независимость криволинейного интеграла 2 типа от пути интегрирования в поверхностно-односвязной области в пространстве.

При каких условиях справедливо $\int\limits_{\Gamma_1}\vec{F}d\vec{r} = \int\limits_{\Gamma_2}\vec{F}d\vec{r}$?

Для справедливости этого равенства в пространстве должны выполняться следующие условия:

1. $\int\limits_{\Gamma_1}\vec{F}dr = \int\limits_{\Gamma_2}\vec{F}dr$
2. $\oint\limits_{\Gamma}\vec{F}d\vec{r} = 0$
3. $rot\vec{F} = 0$ (отличие случая пространства от плоскости)
4. Существует такая функция $u(x,y,z)$, что $du = Pdx + Qdy + Rdz$. Функцию $u(x,y,z)$ называют потенциалом данного поля. $\vec{F} = gradu = \nabla u$

В этом случае $\int\limits_{AB} \vec{F} d\vec{r} = u(B) - u(A)$ - разность потенциалов (аналог формулы Ньютона-Лейбница).

Для доказательства нужно воспользоваться формулой Стокса. Так как ротор равен нулю, то интеграл по замкнутой траектории также равен нулю и интеграл $\int\limits_{AB} \vec{F} d\vec{r}$ не зависит от траектории.

Условие односвязности является существенным. Приведем пример (на плоскости). Вычислить $\oint\limits_{x^2+y^2=1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ (интеграл берется по окружности). Попробуем применить формулу Грина: $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}; Q = \frac{x}{x^2 + y^2}; R = 0$. Вычислим произведение ротора поля $\vec{F}$ на вектор нормали: $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} = 0$. Следует ли отсюда, что интеграл по окружности равен нулю? Чтобы проверить это, сделаем параметризацию:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases} \qquad \oint\limits_{x^2+y^2=1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(\cos t d \sin t - \sin t d \cos t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \int\limits_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi \neq 0$$

Область должна быть односвязной, т.е. внутри окружности все функции должны быть непрерывны. Но $P, Q \notin C(0,0)$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \notin C(0,0)$. Чтобы интегрировать, нужно удалить из рассмотрения точку (0,0), после чего можно применять формулу Грина. Такие же примеры можно привести и для пространства (гравитационное поле с центром в начале координат).