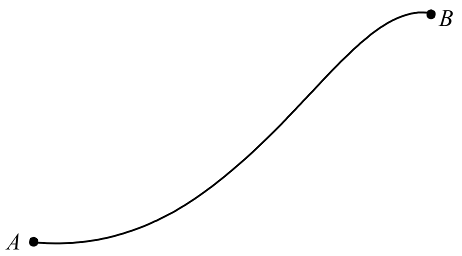
15.04.03

Потенциальные, соленоидальные и гармонические поля

1. Потенциальное поле

Пусть есть две точки A и B.



Пусть $F = (P, Q, R)$ – поле.

Поле называется **потенциальным**, если выполняется одно из условий:

1) $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$

2) $\exists U : \operatorname{grad} U = \vec{F}$. Если это выполнено, то U называется **потенциалом поля**.

$\vec{F} = \dfrac{c \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, где $\vec{r} = (x, y, z); |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – гравитационное поле является потенциальным: $U = \dfrac{c}{|\vec{r}|} \Rightarrow \operatorname{grad} U = \vec{F}$.

Поле $\vec{F}$ называется **центральным**, если $\vec{F} = f(|\vec{r}|) \cdot \vec{r}$. Отсюда следует, что $\vec{F}$ потенциально:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f(|\vec{r}|)x & f(|\vec{r}|)y & f(|\vec{r}|)z \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} f(|\vec{r}|)z - \frac{\partial}{\partial z} f(|\vec{r}|)y\right), \left(\frac{\partial}{\partial z} f(|\vec{r}|)x - \frac{\partial}{\partial x} f(|\vec{r}|)z\right), \left(\frac{\partial}{\partial x} f(|\vec{r}|)y - \frac{\partial}{\partial y} f(|\vec{r}|)x\right)\right].$$

При этом, $\dfrac{\partial}{\partial y} f(|\vec{r}|)z - \dfrac{\partial}{\partial z} f(|\vec{r}|)y = z \cdot f'(|\vec{r}|)\dfrac{y}{|\vec{r}|} - y \cdot f'(|\vec{r}|)\dfrac{z}{|\vec{r}|} = 0$.

Следовательно, $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$ и выполняется первое из условий потенциальности поля. Поэтому любое поле вида $\vec{F} = f(|\vec{r}|) \cdot \vec{r}$ – потенциальное, значит, можно найти его потенциал.

Рассмотрим функцию $F(t) = \int t \cdot f(t)dt$. Докажем, что $U = F(|\vec{r}|)$:

$\frac{\partial U}{\partial x} = |\vec{r}| \cdot f(|\vec{r}|) \frac{x}{|\vec{r}|} = f(|\vec{r}|) \cdot x$. Аналогично получим, что $\frac{\partial U}{\partial y} = f(|\vec{r}|) \cdot x$ и $\frac{\partial U}{\partial z} = f(|\vec{r}|) \cdot z$. Следовательно, всякое центральное поле – потенциально.

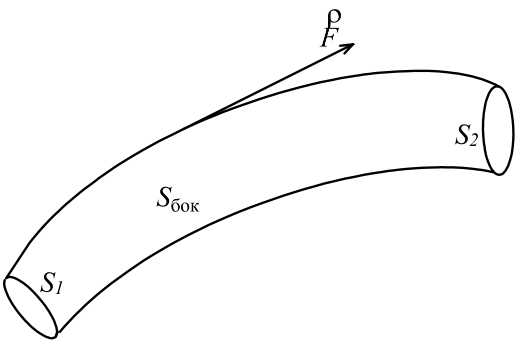
2. Соленоидальное поле

Поле $\vec{F} = (P, Q, R)$ – **соленоидальное**, если его дивергенция равна нулю:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 .$$

По формуле Гаусса–Остроградского:

$\oiint\limits_{S_{\text{внешн}}} \vec{F} dS = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \vec{F} dxdydz = 0 \Rightarrow$ Поток соленоидального поля через любую поверхность равен нулю. Соленоидальные поля характерны для движения потоков жидкостей и газов.



Поток через боковую поверхность $S_{бок}$ всегда равен нулю, так как $\vec{F}$ направлен по касательной к этой поверхности.

Поток через S_1 равен потоку через S_2 с обратным знаком – «сколько вошло, столько вышло».

<u>Утверждение</u>: Если поле $\vec{F}$ – соленоидальное, то оно является ротором поля $\vec{F}_1$, то есть если $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, то $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{F}_1$, где $\vec{F}_1$ – векторный потенциал. Поэтому $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}_1) = 0 \, \forall \vec{F}_1$. Докажем это:

$\vec{F}_1 = (P_1, Q_1, R_1)$.

$$\operatorname{rot} \vec{F}_1 = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}, \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x}, \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right),$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}_1) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) =$$

$$= \underline{\frac{\partial^2 R_1}{\partial y \partial x}} - \underline{\underline{\frac{\partial^2 Q_1}{\partial z \partial x}}} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial z \partial y} - \underline{\frac{\partial^2 R_1}{\partial x \partial y}} + \underline{\underline{\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x \partial z}}} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial y \partial z} \equiv 0.$$

Докажем также, что $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \vec{F}_1) = \vec{0} = (0, 0, 0)$:

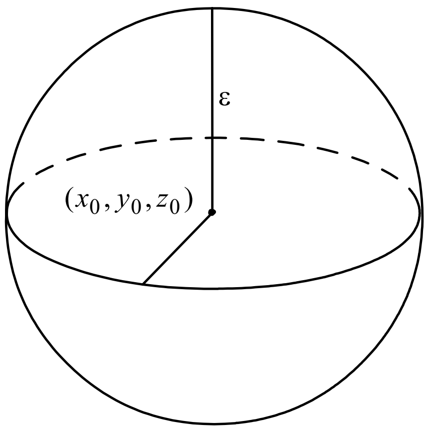
$$\forall U : \operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \Rightarrow \operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}}_{0}, \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}}_{0}, \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}}_{0} \right) \equiv \vec{0}.$$ Доказано.

$$\oiint\limits_{S_{\text{внеш}}} \vec{F} dS = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz$$

Рассчитаем площадь поверхности сферы:

Пусть дана сфера радиуса ε с центром в точке (x_0, y_0, z_0).



Пол теореме о среднем:

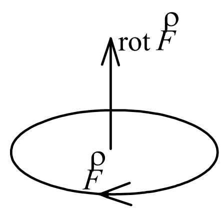
$$\oiint\limits_{S_{\text{внеш}}} \vec{F} dS =$$

$$= \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = |V| \cdot \operatorname{div} \vec{F} \Big|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1 \\ z=z_1}}$$

Перейдем к пределу:

$$\operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\oiint\limits_{V} \vec{F} dS}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \right).$$

Это выражение можно рассматривать, как определение дивергенции. Из него видно, что дивергенция не зависит от системы координат, в которых решается задача.



<u>Дивергенция</u> – это интенсивность потока поля. Аналогично, <u>ротор</u> – завихренность поля $\vec{F}$. В некоторых учебниках ротор называется вихрь.

Ротор является инвариантом относительно системы координат.

3. Гармоническое поле

Гармоническим называется поле, для которого и ротор и дивергенция равны нулю.

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{F} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{F} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = \operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \text{ и}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \frac{\partial^2 U}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 U}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 U}{(\partial z)^2} = 0\,.$$

Это выражение – уравнение Лапласа. Его решением является гармоническая функция, поэтому поле, обладающее такими свойствами, называется гармоническим.

ПРИМЕР:

В качестве примера рассмотрим гравитационное поле, которое является единственным центральным полем, одновременно имеющим свойства гармонического.

Докажем, что всякое центральное гармоническое поле – гравитационное и наоборот.

1. $\vec{F} = f(|\vec{r}|) \cdot \vec{r}, \quad \operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Это условие проверено выше.

2. $\operatorname{div} \vec{F} = 0$. Используем это условие:

$\vec{F} = \big(f(|\vec{r}|)x,\ f(|\vec{r}|)y,\ f(|\vec{r}|)z \big)$. Пусть $|\vec{r}| = t$, тогда $\dfrac{\partial t}{\partial x} = \dfrac{x}{t}$.

$$\operatorname{div} \vec{F} = f'(t)\frac{x^2}{t} + f(t) + f'(t)\frac{y^2}{t} + f(t) + f'(t)\frac{z^2}{t} + f(t) =$$

$$= f'(t)\left(\frac{\overbrace{x^2 + y^2 + z^2}^{t^2}}{t} \right) + 3f(t) = t \cdot f'(t) + 3f(t) = 0.$$

Отсюда получаем:

$\dfrac{f'(t)}{f(t)} = -\dfrac{3}{t}$. Интегрируя обе части по *t*, получим:

$\ln f(t) = -3\ln t + \ln C$,

$f(t) = \dfrac{C}{t^3}$. Отсюда, возвращаясь к $|\vec{r}|$, получим, что $f(|\vec{r}|) = \dfrac{C}{|\vec{r}|^3}$.

Следовательно, так как $\vec{F} = f(|\vec{r}|) \cdot \vec{r}$, окончательно получаем, что $\vec{F} = \dfrac{C \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, а это по определению – гравитационное поле.